EXERCICE

1. $\star$ $G = (G \cap \overline{D}) \cup (G \cap D)$; or G et D sont indépendants donc $P((G \cap D) = p^2$.
   De plus $G \cap \overline{D}$ et $G \cap D$ sont incompatibles donc $P(G) = p = P(G \cap \overline{D}) + P(G \cap D) = P(G \cap \overline{D}) + p^2$.
   Ainsi $P(\overline{D} \cap G) = p - p^2 = p\,(1-p) = P(G) \times P(\overline{D})$, donc $\overline{D}$ et G sont indépendants.
   $\star$ De même, $P(\overline{D}) = 1-p = P(\overline{D} \cap \overline{G}) + P(\overline{D} \cap G)$ donc $P(\overline{D} \cap \overline{G}) = (1-p)-(p-p^2) = 1-2\,p+p^2 = (1-p)^2$.
   Donc $P(\overline{D} \cap \overline{G}) = P(\overline{D}) \times P(\overline{G})$, $\overline{D}$ et $\overline{G}$ sont indépendants.
2. – “N'avoir aucun rein atteint” est l'événement $\overline{D} \cap \overline{G}$, donc $p_0 = (1-p)^2$.
   – “Avoir un seul rein atteint” est l'événement $(D \cap \overline{G}) \cup (\overline{D} \cap G)$, $(D \cap \overline{G})$ et $(\overline{D} \cap G)$ étant des événements incompatibles. Le calcul de $P((D \cap \overline{G})$ donne également $p - p^2$, donc $p_1 = 2\,p\,(1-p)$.
   – “Avoir les deux reins atteints” est l'événement $D \cap G$, donc $p_2 = p^2$.
   On pouvait aussi remarquer que les 3 événements de cette question forment un système complet d'événements, donc la somme de leurs probabilités vaut 1.
3. Il s'agit de calculer une probabilité conditionnelle : $P_{D\cup G}\Big((D \cap \overline{G}) \cup (\overline{D} \cap G)\Big)$ qui vaut $\dfrac{P\Big((D \cap \overline{G}) \cup (\overline{D} \cap G)\Big)}{P(D \cup G)}$.
   Notons p_3 cette probabilité, on a $p_3 = \dfrac{2\,p\,(1-p)}{p+p-p^2} = \dfrac{2\,(1-p)}{2-p}$.
4. Il s'agit à nouveau d'une probabilité conditionnelle : $P_D(D \cap \overline{G}) = \dfrac{P(D \cap \overline{G})}{P(D)} = \dfrac{p\,(1-p)}{p} = 1-p$

PROBLÈME

Partie 1

1. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$, donc soit $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$, $\forall t \in [k, k+1]$ on a :
   $\dfrac{1}{(k+1)^2} \leqslant \dfrac{1}{t^2} \leqslant \dfrac{1}{k^2}$, soit en intégrant de k à $k+1$: $\dfrac{1}{(k+1)^2} \leqslant \left[-\dfrac{1}{t}\right]_k^{k+1} \leqslant \dfrac{1}{k^2}$.
   L'inégalité de droite fournit : $\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1} \leqslant \dfrac{1}{k^2}$; en transposant celle de gauche pour $k-1$, on obtient : $\dfrac{1}{\big((k+1)-1\big)^2} \leqslant \left[-\dfrac{1}{t}\right]_{k-1}^{(k+1)-1}$, c'est à dire : $\dfrac{1}{k^2} \leqslant \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$, d'où l'encadrement demandé.
   (a) En écrivant l'inégalité de gauche pour $k \in [\![2, n]\!]$ et en ajoutant membre à membre, on a :
   $1 + \sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k^2} \leqslant 1 + \sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k} = 1 + 1 - \dfrac{1}{n} < 2$ *(somme télescopique)*. La série de terme général $\dfrac{1}{n^2}$ est une série à termes positifs, d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, elle converge.
   (b) On écrit l'encadrement (1) pour $k \in [\![n, N]\!]$ où n et N sont deux entiers supérieurs à 2 et on ajoute membre à membre : $\sum\limits_{k=n}^{N} \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{N+1} \leqslant \sum\limits_{k=n}^{N} \dfrac{1}{k^2} \leqslant \sum\limits_{k=n}^{N} \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k} = \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{N}$.
   Cet encadrement est valable pour toute valeur de N supérieure à n, donc par passage à la limite lorsque $N \to +\infty$: $\dfrac{1}{n} \leqslant R_n \leqslant \dfrac{1}{n-1}$. Comme $\dfrac{1}{n-1} \underset{\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$, on déduit $R_n \underset{\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.
2. $\dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k^2} = \dfrac{1}{k^2\,(k-1)} = \dfrac{1}{k^3-k} > \dfrac{1}{k^3}$ *(puisque $k^3 > k^3 - k$).*
   Pour $N > n$, $\sum\limits_{k=n}^{N} \dfrac{1}{k^3} \leqslant \sum\limits_{k=n}^{N} \left(\dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k^2}\right) \leqslant \left(\dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{N}\right) - \underbrace{\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{N+1}\right)}_{\text{minorant de } \sum_{k=n}^{N} \frac{1}{k^2}} \leqslant \dfrac{1}{n\,(n-1)}$

Partie 2

1. $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n = \dfrac{1}{n\,(1+\frac{1}{n})} - \ln(1+\frac{1}{n}) =$
   $\dfrac{1}{n}\left(1 - \dfrac{1}{n} + o\Big(\dfrac{1}{n}\Big)\right) - \left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2\,n^2} + o\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)\right) = -\dfrac{1}{2\,n^2} + o\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$ donc $u_n - u_{n+1} \underset{\infty}{\sim} \dfrac{1}{2\,n^2}$.
   $u_n - u_{n+1}$ est équivalente à une suite à termes positifs, donc il existe un rang à partir duquel $u_n - u_{n+1} > 0$ *(en effet, $\dfrac{u_n - u_{n+1}}{1/(2\,n^2)}$ a pour limite 1, donc est strictement positif à partir d'un certain rang).* La suite (u_n) est donc décroissante à partir d'un certain rang.

2. L'équation de la corde entre les points d'abscisse k et $k+1$ est $\dfrac{1}{k} - y = \dfrac{x-k}{k\,(k+1)}$, donc par convexité de $x \mapsto \frac{1}{x}$, on a : $\forall t \in [k, k+1]$, $\dfrac{1}{t} \leqslant \dfrac{1}{k} - \dfrac{t-k}{k\,(k+1)}$ donc par intégration de k à $k+1$:
$\ln\left(\dfrac{k+1}{k}\right) = \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}\,t \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{k} + \frac{k-t}{k\,(k+1)}\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1}\right)$.
Remarque : la valeur de l'intégrale de $t \mapsto \dfrac{1}{k} + \dfrac{k-t}{k\,(k+1)}$ *de* k *à* $k+1$ *se calcule de façon très simple en prenant l'aire du trapèze délimité par les points de coordonnées* $(k, 0)$, $(k+1, 0)$, $(k, \frac{1}{k})$ *et* $(k+1, \frac{1}{k+1})$, *le calcul de l'équation de la corde n'est donc pas nécessaire.*
L'inégalité de gauche s'obtient grâce à la décroissance de $x \mapsto \frac{1}{x}$, donc $\forall t \in [k, k+1]$, $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \dfrac{1}{t}$ puis on intègre sur $[k, k+1]$.

3. $u_{k+1} - u_k = \dfrac{1}{k+1} - \ln\left(\dfrac{k+1}{k}\right)$ donc, d'après l'encadrement obtenu à la question 2, on a :
$\forall k \geqslant 1$, $\dfrac{1}{k+1} - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{k+1}\right) \leqslant u_{k+1} - u_k \leqslant 0$, soit $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{k+1} - \dfrac{1}{k}\right) \leqslant u_{k+1} - u_k \leqslant 0$.
En ajoutant membre à membre pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$: $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n} - 1\right) \leqslant u_n - u_1 \leqslant 0$, donc comme $u_1 = 1$, $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2\,n} \leqslant u_n \leqslant 1$. La suite (u_n) est monotone *(décroissante)* minorée *(par* $1/2$*)* donc converge ; par passage à la limite, on a donc $\dfrac{1}{2} \leqslant \lim u_n = \gamma \leqslant 1$.

Partie 3

1. (a) La fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est de classe $\mathscr{C}^3$ sur $I = [0, 1/2]$ donc on peut appliquer la formule de Taylor Lagrange à l'ordre 2 avec $a = t$ et $b = 0$: pour $t \in]0, 1/2]$ il existe $c \in]0, t[$ tel que
$\ln 1 = \ln(1+t) - t \times \dfrac{1}{1+t} + \dfrac{t^2}{2!} \times \dfrac{-1}{(1+t)^2} - \dfrac{t^3}{3!} \times \dfrac{2}{(1+c)^3}$.
$0 < \dfrac{2}{(1+c)^3} < 2$ et $0 < \dfrac{t^2}{2\,(1+t)^2} < \dfrac{t^2}{2}$ donc $\dfrac{t^2}{2} - \dfrac{2\,t^3}{3} < \dfrac{t^2}{2} - \dfrac{t^3}{3} < \ln(1+t) - \dfrac{t}{1+t} < \dfrac{t^2}{2}$ et pour $t = 0$ on a égalité des deux côtés.

   (b) $u_k - u_{k+1} = \ln\left(\dfrac{k+1}{k}\right) - \dfrac{1}{k+1} = \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) - \dfrac{1/k}{1 + (1/k)}$. Pour $k \geqslant 2$, on a $\dfrac{1}{k} \in I$ donc
$\dfrac{1}{2\,k^2} - \dfrac{2}{3\,k^3} \leqslant u_k - u_{k+1} \leqslant \dfrac{1}{2\,k^2}$.

   (c) $\displaystyle\sum_{k=n}^{N} (u_k - u_{k+1}) = u_n - u_{N+1}$ donc la série converge et $\displaystyle\sum_{k=n}^{\infty} (u_k - u_{k+1}) = u_n - \gamma$.

   (d) Soit $n \geqslant 2$, $\displaystyle\sum_{k=n}^{N} \left(\frac{1}{2\,k^2} - \frac{2}{3\,k^3}\right) \leqslant \sum_{k=n}^{N} (u_k - u_{k+1}) \leqslant \sum_{k=n}^{N} \frac{1}{2\,k^2}$. On a vu dans la partie 1 que $\dfrac{1}{n} \leqslant \displaystyle\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{n-1}$ et $\displaystyle\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^3} \leqslant \frac{1}{n\,(n-1)}$, donc avec l'encadrement précédent, par passage à la limite lorsque $N \to +\infty$ $\dfrac{1}{2\,n} - \dfrac{2}{3\,n\,(n-1)} \leqslant u_n - \gamma \leqslant \dfrac{1}{2\,(n-1)}$.

2. • Comme $\dfrac{1}{2\,n} - \dfrac{2}{3\,n\,(n-1)} \leqslant u_n - \gamma \leqslant \dfrac{1}{2\,(n-1)}$, il suffit d'avoir $\dfrac{1}{2\,(n-1)} - \dfrac{1}{2\,n} + \dfrac{2}{3\,n\,(n-1)} \leqslant 10^{-6}$; c'est à dire $n\,(n-1) \geqslant \dfrac{7 \cdot 10^6}{6}$. En première approximation $n \simeq 1\ 000$ convient, (en fait plutôt 1 080).
   • On résout $n^2 - n - \frac{7000000}{6} \geqslant 0$, ce qui peut se faire en calculant Δ avec les formules du cours.

```
n=1, S=1,
deff('y=f(n)','y=7 ./(6*(n.^2-n))')
precision=10^(-6)
while f(n+1)>precision do
    n=n+1
    S=S+(1/n)
end
disp(n)
disp(S-log(n))
```

   • $u_{n_0} - \dfrac{1}{2\,(n_0-1)} \leqslant \gamma \leqslant u_{n_0} - \dfrac{1}{2\,n_0} + \dfrac{2}{3\,n_0\,(n_0-1)}$