Mathématiques - 2 BCPST 1&2 - Lycée Michel Montaigne

DM N°8 - A remettre le mardi 6 décembre 2011

« Chaîne de Markov - Partie à deux ou à une infinité de joueurs »

EXERCICE

N personnes $A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_N$ se transmettent dans cet ordre une information reçue préalablement par A_1.
- L'information reçue par A_1 sera notée « Information Initiale ».
- Chaque personne transmet fidèlement l'information reçue avec la probabilité $p \in \,]0,1[$ ou la transforme en son contraire avec la probabilité q $(q = 1-p)$ de sorte que la n$^{\text{ème}}$ personne reçoit l'information initiale ou son contraire.

On désigne par I_n l'événement « la n$^{\text{ème}}$ personne reçoit l'Information Initiale » et l'on note :
$p_n = P(I_n)$ et $q_n = 1 - p_n$.

1. Pour tout entier $n \in \{1,\ 2,\ \cdots,\ N-1\}$, exprimer p_{n+1} et q_{n+1} en fonction de p_n et q_n.
2. Pour tout entier n compris entre 1 et N, on pose $X_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$.
   - Montrer qu'il existe une matrice A telle que :
   $$\forall n \in \{1,\ 2,\ \cdots,\ N\}, \quad X_{n+1} = A\ X_n$$
   - Que vaut X_1 ? En déduire X_N en fonction de $N,\ A$ et X_1.
3. Montrer que la matrice A est semblable à $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2p-1 \end{pmatrix}$ et déterminer P tel que $\Delta = P^{-1}AP$.
4. En déduire successivement A^{N-1}et X_N dont vous expliciterez les termes. Vérifier que vous obtenez
   $$P(I_N) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2p-1)^{N-1} \quad \text{et} \quad P\left(\overline{I_N}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(2p-1)^{N-1}$$
   Quelles sont les limites de $P(I_N)$ et $P\left(\overline{I_N}\right)$ lorsque N tend vers $+\infty$?

PROBLÈME

Première partie

Deux tireurs A_1 et A_2 disputent un match selon les règles suivantes :
- A_1 et A_2 tirent alternativement sur une cible jusqu'à ce que l'un des deux la touche. Celui-ci est alors déclaré vainqueur de ce match.
- A_1 tire en premier.

Le tireur A_1 touche la cible avec la probabilité $p_1 \in \,]0,1[$ supposée constante et l'on note $q_1 = 1 - p_1$.
Le tireur A_2 touche la cible avec la probabilité $p_2 \in \,]0,1[$ supposée constante et l'on note $q_2 = 1 - p_2$.
Les tirs sont indépendants et numérotés à partir de 1. On remarquera que A_1 tire à des rangs impairs.

1. Soit n un entier naturel quelconque.
   (a) Calculer la probabilité que A_1 remporte le match au rang $2n+1$.
   (b) Calculer la probabilité que A_2 remporte le match au rang $2n+2$.
   (c) On note pour $i \in \{1,2\}$, G_i l'événement «A_i remporte le match ».
   Montrer que $P(G_1) = \dfrac{p_1}{1-q_1q_2}$ et calculer $P(G_2)$.
   (d) Démontrer que la probabilité de l'événement I : « le match dure indéfiniment » est nulle.
2. On dira que le match entre ces deux joueurs est équitable si $P(G_1) = P(G_2)$.
   Montrer l'équivalence des quatre propriétés suivantes :
   i. Le match est équitable.

ii. $q_1 p_2 = p_1$.

iii. $p_2 = \dfrac{p_1}{1-p_1}$.

iv. $1 - q_1 q_2 = 2p_1$.

3. Nous supposerons dans cette question le match équitable et désignerons par T la variable aléatoire égale au nombre de tirs effectués jusqu'à la fin du match.
   (a) Montrer que $p_1 < \frac{1}{2}$
   (b) Soit n un entier naturel non nul.
   Déterminer $P(T = n)$ après avoir calculé $P(T = 1)$, $P(T = 2)$.
   (c) Déterminer l'espérance de T notée $E(T)$ et définie par

$$E(T) = \sum_{n=1}^{+\infty} n \times P(T = n)$$

Seconde partie

Dans cette partie entrent en lice une **suite illimitée** de tireurs $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Le match se déroule selon les règles suivantes :

- A_1, A_2, $\cdots \mathrm{A}_n$, $\cdots$ tirent alternativement sur une cible jusqu'à ce que l'un des deux la touche. Celui-ci est alors déclaré vainqueur de ce match.
- A_1 tire en premier, A_2 tire en second, A_3 tire en troisième et ainsi de suite....

Pour $n \geq 1$, le tireur A_n touche la cible avec la probabilité $p_n \in]0, 1[$ et l'on note $q_n = 1 - p_n$.
Les tirs sont indépendants et numérotés à partir de 1. On remarquera que chaque joueur ne peut tirer au plus qu'une fois.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous poserons

$$\varphi(n) = \begin{cases} \displaystyle\prod_{i=1}^{n} q_i & \text{si} \quad n \geq 1 \\ 1 & \text{si} \quad n = 0 \end{cases}$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous noterons G_n l'événement «A_n remporte le match ».
   (a) Montrer que la probabilité de l'événement G_n vaut : $P(G_n) = \varphi(n-1) - \varphi(n)$ et justifier la convergence de la suite $\left(\varphi(n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (b) On note a la limite de cette suite.
   En déduire que la série de terme général $P(G_n)$ $(n \geq 1)$ est convergente et exprimer sa somme en fonction de a.
   (c) Exprimer, en fonction de a, la probabilité de l'événement I : « le jeu dure indéfiniment ».

2. Nous nous proposons de déterminer a dans certaines situations.
   (a) Montrer que si a est non nul alors q_n tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$.
   La réciproque est-elle vraie ?
   Indication : on examinera le cas de la suite de terme général : $q_n = \frac{n}{n+1}$.
   (b) Déterminer a si : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_n = p \in]0, 1[$.
   (c) Déterminer a si : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_n = \dfrac{1}{(n+1)^2}$

3. (a) i. Si la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, montrer qu'il existe un entier n_0 tel que

$$\forall n \geq n_0, \quad \frac{1}{2}p_n \leq -\ln(1-p_n) \leq \frac{3}{2}p_n$$

   ii. Si la suite (p_n) ne tend pas vers 0 : quelle est la nature de la série de terme général p_n et celle de la série de terme général $\ln(1-p_n)$?
   iii. En déduire que les séries de terme général $\ln(1-p_n)$ et p_n sont toujours de même nature.
   (b) Exprimer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(1-p_k)$ en fonction de $\ln \varphi(n)$.
   Comparer les natures de la suite $(\ln(\varphi(n)))_{n\in\,\mathbb{N}^*}$ et de la série de terme général p_n.
   (c) En déduire que la probabilité que le jeu dure indéfiniment est nulle si et seulement si la série de terme général p_n diverge.

- fin -