Mathématiques - 2 BCPST 1&2 - Lycée Michel Montaigne

DM N°6 - A remettre le vendredi 4 décembre 2015

« Séries - Probabilités discrètes - Simulations en Python »

EXERCICE N°1 - Séries

On considère la suite (u_n) définie par $u_1 = \dfrac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

1. Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

2. Prouver la convergence de la série $\sum u_n^2$.

3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = u_1 \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} (1 - u_k)$.

En déduire la nature de la série $\sum \ln(1 - u_n)$, puis celle de la série $\sum u_n$.

4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k\right)^2 \leq n \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k^2$. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{=} o(n)$.

EXERCICE N°2 - Tirage dans une urne

Soient a un entier naturel supérieur ou égal à deux, b un entier naturel non nul et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante d'entiers naturels tels que $u_0 = b$.

On effectue dans une urne contenant initialement b boules blanches et b boules noires une suite de tirages de la façon suivante :

- Premier tirage : on tire une boule.
  - si elle est blanche, elle est replacée dans l'urne avec en plus $u_1 - u_0$ autres boules blanches, on procède ensuite au tirage suivant.
  - si elle est noire, on s'arrête définitivement.
- Éventuels tirages suivants : pour tout entier n supérieur ou égal à deux, si les $n-1$ premiers tirages ont tous donné une boule blanche, on procède au n ième tirage :
  - si la boule obtenue est blanche, elle est replacée dans l'urne avec, en plus, $u_n - u_{n-1}$ autres boules blanches.
  - si elle est noire, ce n ième tirage est le tirage final.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'urne contient b boules noires et u_n boules blanches au moment où l'on procède au $(n+1)$ ième tirage lorsque celui-ci a lieu.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par :

- B_n l'événement : « une boule blanche apparaît au n ième tirage »
- A_n l'événement : « une boule blanche apparaît à chacun des n premiers tirages ».

On note également, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

- p_n la probabilité d'obtenir une boule noire au n ième tirage, et
- q_n la probabilité de l'événement A_n.

1. (a) Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, q_n en fonction de b et des $(u_k)_{0\leq k\leq n-1}$.

(b) Étudier le sens de variation de la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. En déduire qu'elle converge vers un nombre réel $\ell \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$.

(c) Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} p_k$ en fonction de q_n. En déduire que la série de terme général p_n converge et que sa somme vérifie $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} p_k = 1 - \ell$.

(d) On introduit l'événement E : « on n'obtient jamais de boules noires ». Montrer que $P(E) = \ell$.

(e) Montrer que les séries de terme général $\dfrac{1}{u_n}$ et $\ln\left(1 + \dfrac{1}{u_n}\right)$ sont de même nature.

(f) Comparer les natures de la suite $\left(\ln\left(\frac{1}{q_n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et de la série de terme général $\frac{1}{u_n}$.

(g) En déduire que la probabilité de ne pas obtenir de boule noire dans la suite de tirages est nulle si et seulement si la série de terme général $\frac{1}{u_n}$ diverge.

2. Dans cette question, on suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = ba^n$ (la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien croissante avec $u_0 = b$).

(a) Préciser pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'expression de q_n. Étudier alors l'éventualité de ne pas obtenir de boule noire dans la suite des tirages.

(b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall p \in \mathbb{N}^*,\quad \sum_{k=n}^{n+p-1} \frac{1}{a^k} \leq \frac{1}{a^{n-1}(a-1)}$.

(c) Montrer que : $\forall x \in [0,1],\ 1 + x \leq e^x \leq 1 + 2x$
puis que :$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall p \in \mathbb{N}^*,\quad 1 \leq \frac{q_n}{q_{n+p}} \leq \exp\left(\frac{1}{a^{n-1}(a-1)}\right)$.
En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq q_n - \ell \leq \frac{1}{a^{n-1}(a-1)}$.

(d) Dans le cas où $a = 2$, pour quelle valeur de n, q_n représente-t-il une valeur approchée de ℓ à 10^{-6} près ? Déterminer alors dans ce cas, la probabilité (à 10^{-6} près) de ne pas obtenir de boule noire dans la suite des tirages.

EXERCICE N°3 - INFORMATIQUE

Simulation d'un jeu très populaire aux États-Unis : **le jeu de craps.**
Le joueur lance simultanément deux dés non pipés et l'on observe, pour chaque lancer, la somme des points sur les dés.

- Le joueur gagne au premier lancer si cette somme vaut 7 ou 11.
- Le joueur perd au premier lancer si cette somme vaut 2, 3 ou 12.
- Dans les autres cas, le joueur doit relancer les 2 dés jusqu'à ce qu'il obtienne à nouveau la somme initiale ou un 7.
  - S'il réussit à obtenir cette somme avant d'obtenir un 7, il gagne.
  - S'il obtient un 7 avant d'obtenir la somme initiale, il perd.

Dans ce travail, il vous est demandé de n'utiliser que la bibliothèque `random`. Nous vous rappelons alors que :

- `random` est une fonction de cette bibliothèque et que l'instruction `R=random.random()` affecte à R une valeur pseudo-aléatoire de type `float` de Loi Uniforme sur $]0,1[$.
- `int(x)` est l'entier le plus proche de x dans le chemin qui mène de `0` à `x`.

1. Écrire à l'aide de ces deux fonctions, le script d'une fonction LANCER_DE qui permette de simuler le lancer d'un dé à 6 faces non pipé.
Par exemple, l'instruction `R=LANCER_DE()` *affecte à R une valeur entière aléatoire de loi Uniforme sur* $\{1,2,3,4,5,6\}$.

2. Écrire le script d'une fonction `SOMME` de seul argument d'entrée `n` qui permette de simuler le lancer simultané de `n` dés et retourne la somme des résultats obtenus sur chaque dé.
Par exemple, l'instruction `S=SOMME(2)` *affecte à R la somme des points obtenus en lançant deux dés simultanément.*

3. Écrire le script d'une fonction `CRAPS` qui permette de simuler une partie de Craps et retourne d'une part une variable Booléenne indiquant si le joueur a gagné ou non, d'autre part la durée de la partie exprimée en nombres de lancers.
Par exemple, l'instruction `[B,L]=CRAPS()` *affecte à la variable* `B` *la valeur aléatoire* `True` *si le joueur gagne et la valeur* `False` *sinon, puis à* `L` *la longueur de la partie.*

4. Écrire le script d'une fonction `SIMULATION` de seul argument d'entrée `Nb` qui permette de simuler `Nb` parties de craps et retourne la fréquence de victoires, la longueur moyenne et la variance des longueurs de ces parties.

5. Écrire alors un programme dont la première instruction est : `[FREQ,MOY,VAR]=SIMULATION(1000000)` et dont les instructions suivantes donnent après exécution :
- une estimation ponctuelle de la probabilité p de gagner au craps.
- un intervalle de confiance de p pour un niveau de confiance de 95%
- un intervalle de confiance de p pour un niveau de confiance de 99%

Copier les résultats obtenus à la suite des 5 scripts demandés. Exporter le tout au format pdf comme le propose PYZO et imprimer sur une seule page !