Devoir maison 10

à rendre pour le mercredi 08 février

EXERCICE 1

1. Soient $U = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ deux matrices colonnes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ toutes deux non nulles. On pose $M = U\,{}^tV$ et $\alpha = {}^tVU$. On identifiera $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ avec $\mathbb{R}$.
   (a) Uniquement dans cette question, on suppose que $U = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Calculer, pour tout $p \in \mathbb{N}$, M^p.

   Montrer que M n'est pas diagonalisable.

   On retourne au cas général.

   (b) Vérifier en une ligne que $M^2 = \alpha M$. En déduire les seules valeurs propres possibles de M.
   (c) Calculer le rang de M. En déduire que 0 est valeur propre de M et préciser la dimension du sous-espace propre associé.
   (d) M est-elle diagonalisable ?
   indication : distinguer le cas $\alpha = 0$ du cas $\alpha \neq 0$, calculer MU.
2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1. Montrer qu'il existe $(U,V)^2 \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2$ tel que $M = U\,{}^tV$.

EXERCICE 2

L'objectif de ce problème est de démontrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$ converge et que sa valeur $I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$ est $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit

$$I_n = \int_0^1 \left(1-t^2\right)^n\,dt\,,\quad J_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\,dt \quad \text{et} \quad W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,dt$$

1. Montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}\,,\quad 1+x \leq e^x$$
2. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, justifier l'existence des intégrales I_n et W_n.
   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, justifier l'existence de l'intégrale J_n. Qu'en est-il de J_0 ?
3. (a) Utiliser 1. pour montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*\,,\quad I_n \leq \int_0^1 e^{-nt^2}\,dt \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} e^{-nt^2}\,dt \leq J_n$$
   (b) En déduire, à l'aide d'un changement de variable, que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*\,,\quad I_n \leq \frac{I}{\sqrt{n}} \leq J_n$$
4. Montrer que la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.
5. A l'aide d'une intégration par parties, exprimer $W_n - W_{n+2}$ en fonction de W_{n+2}. En déduire que
$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\quad W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}\,W_n$$
6. (a) Vérifier que la suite de terme général $u_n = (n+1)W_nW_{n+1}$ est constante.
   (b) En utilisant 4 et 5, montrer que $W_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} W_n$.
   (c) En déduire un équivalent simple de W_n quand $n \to +\infty$
7. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\quad I_n = W_{2n+1} \quad \text{et} \quad J_{n+1} = W_{2n}$$
indication : pour I_n, poser $t = \sin(u)$, et pour J_{n+1}, poser $t = \tan(u)$.
8. Conclure.