Couples de variables aléatoires discrètes

1. On dispose de n boîtes numérotées de 1 à n. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, la boîte k contient k boules numérotées de 1 à k. On choisit au hasard une boîte puis une boule dans cette boîte. Soit X le numéro de la boîte, et Y le numéro de la boule.
   (a) Déterminer la loi du couple (X, Y).
   (b) Calculer $P(X = Y)$.
   (c) Déterminer la loi de Y puis calculer $E(Y)$.
2. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ vérifiant :
   $\forall n \in \mathbb{N}\,,\ P(X = n) = P(Y = n) = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1 + a^n}{n!}\right)$
   (a) Déterminer le réel a.
   (b) Calculer l'espérance et la variance de X.
   (c) Étudier la loi de $S = X + Y$.
3. Soit une pièce pour laquelle la probabilité d'obtenir *pile* 1 est égale à $p \in]0, 1[$. On la lance 4 fois de suite. X est la variable aléatoire égale au nombre de obtenus au cours des trois premiers lancers, et Y la variable aléatoire égale au nombre de 1 obtenus au cours des trois derniers lancers.
   (a) Quelles sont les lois marginales de X et Y
   (b) Déterminer la loi conjointe des variables X et Y.
   (c) On désigne par Z la variable « Y conditionnée par $X = 1$ » . Calculer l'espérance et la variance de Z.
   (d) Déterminer p pour que la variance de Z soit maximale.
4. Soit $(a, b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$. Pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}^2$, on pose $p_{ij} = \dfrac{a}{b^{i+j}}$.
   (a) Déterminer les conditions nécessaires et suffisantes portant sur a et b pour que la famille $(p_{ij})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ détermine une loi de probabilité d'un couple (X, Y) de variables aléatoires discrètes de Ω dans $\mathbb{R}$.
   (b) Étudier alors l'indépendance de X et Y.
5. Un livre contient X erreurs où X est un aléa de Poisson de paramètre λ. N exemplaires de ce livre sont distribués à N relecteurs différents. Pour chacun des relecteurs, chaque faute est décelée avec la probabilité $1/3$, indépendamment des autres.
   (a) Déterminer la probabilité que toutes les fautes soient décelées.
   (b) Déterminer la valeur minimale de N pour laquelle cette probabilité est supérieure à $0,9$.
   (c) Soit Z le nombre d'erreurs décelées par l'ensemble des relecteurs.
   Quelle est la loi de Z sachant $[X = k]$?
   (d) Quelle est la loi de Z ?
   (e) Quelle est la loi de X sachant $[Z = \ell]$?
6. Lors d'un très grand rallye qui traverse des montagnes et des déserts, le nombre de véhicules X qui roulent un jour donné suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ (tous les véhicules ne roulent pas tous les jours à cause d'éventuelles pannes). Tous les jours, chaque véhicule participant a la probabilité $p \in]0, 1[$ de tomber en panne. Soit Y le nombre de véhicules qui connaissent cette mésaventure.
   (a) Rappeler $E(X)$ et $V(X)$.
   (b) Calculer, pour tout $(k, n) \in \mathbb{N}^2$, la probabilité $P_{(X=n)}(Y = k)$.
   (c) Déterminer la loi de Y et donner $E(Y)$.
7. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre λ. Soit Y une variable aléatoire dont la loi conditionnée par $(X = n)$ est la loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (où p est un réel fixé de $]0, 1[$). Déterminer la loi de Y.
8. Le nombre N de clients qui examinent un modèle donné de voiture un jour donné est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On pose $p = P(N = 0)$ (avec $p \in]0, 1[$) et on admet l'hypothèse suivante :
   $\forall (r, s) \in \mathbb{N}^2\,,\ P\big(N \geqslant r + s \,/\, N \geqslant r\big) = P(N \geqslant s)$
   (a) Calculer $P(N \geqslant 1)$, $P(N \geqslant 2)$ et $P(N = 1)$.
   (b) i. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $P(N \geqslant n)$.
       ii. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire N.
   (c) Calculer l'espérance et la variance de N.

9. On lance infiniment une pièce de monnaie équilibrée. Soit X_1 la variable aléatoire égale au rang d'apparition du premier Pile, et X_2 la variable aléatoire égale au rang d'apparition du deuxième Pile. Déterminer la loi conjointe du couple (X_1, X_2), puis en déduire les lois marginales de X_1 et X_2. Calculer $E(X_1)$ et $E(X_2)$.
10. Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes admettant des variances $V(X)$ et $V(Y)$.
    On pose $Z = X + Y$ et $T = X - Y$.
    (a) Montrer que si Z et T sont indépendantes, alors, $V(X) = V(Y)$.
    (b) On suppose que X et Y sont indépendantes, de même loi uniforme sur $[\![1, 3]\!]$.
        i. Montrer que $V(X) = V(Y)$.
        ii. Déterminer les lois de Z et T. Les variables Z et T sont-elles indépendantes ?
        iii. La réciproque de la question 10a est-elle vérifiée ?
11. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.
    (a) Calculer $P(X = Y)$ et $P(X \geqslant Y)$.
    (b) Déterminer la loi de la variable aléatoire $D = X - Y$.
12. Une urne contient N boules numérotées de 1 à N. On en tire n $(n \leqslant N)$ une à une avec remise. On désigne par X et Y le plus petit et le plus grand des nombres obtenus.
    (a) Calculer $P(X \geqslant x)$ pour tout $x \in [\![1, N]\!]$. En déduire la loi de X.
    (b) Calculer $P(Y \leqslant y)$ pour tout $y \in [\![1, N]\!]$. En déduire la loi de Y.
    (c) Calculer $P\Big((X > x) \cap (Y \leqslant y)\Big)$ pour tout $(x, y) \in [\![1, N]\!]^2$. En déduire la loi du couple (X, Y).