2 B.C.P.S.T – VÉTO 2 Lundi 8 septembre 2014

Espaces vectoriels

1. Préciser si F est ou non un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel E

$E=\mathbb{R}^3$	$\mathbb{K}=\mathbb{R}$	$F=\{(x,y,z)\in E\,,\ x\,y\,z=0\}$
$E=\mathbb{C}^n$	$\mathbb{K}=\mathbb{C}$	$F=\{(x_1,\dots,x_n)\in E\,,\ x_1+\dots+x_n=0\}$
$E=\mathbb{C}^2$	$\mathbb{K}=\mathbb{C}$	$F=\{(z_1,z_2)\in E\,,\ z_1+\overline{z_2}=0\}$
$E=\mathbb{C}^2$	$\mathbb{K}=\mathbb{R}$	$F=\{(z_1,z_2)\in E\,,\ z_1+\overline{z_2}=0\}$
$E=\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$	$\mathbb{K}=\mathbb{R}$	$F=\{f\in E\,/\,\forall x\in\mathbb{R}\,,\ f(x)=f(1-x)\}$
$E=\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$	$\mathbb{K}=\mathbb{R}$	$F=\{f\in E\,/\,\forall x\in\mathbb{R}\,,\ f(x)\geqslant 0\}$
$E=\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$	$\mathbb{K}=\mathbb{R}$	$F=\{f\in E\,,\ f \text{ est monotone}\}$
$E=\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$	$\mathbb{K}=\mathbb{R}$	$F=\{(u_n)\in E\,/\,4\,u_{n+2}-5\,u_{n+1}+u_n=0\}$
$E=\mathbb{R}[X]$	$\mathbb{K}=\mathbb{R}$	$F=\{P\in E\,,\ P+X\,P'+P''=0\}$
$E=\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$	$\mathbb{K}=\mathbb{R}$	$F=\{M\in\mathscr{M}_3(\mathbb{R})/A\,M=M\,A\}$, A fixée $\in\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$
$E=\mathbb{R}^{]0,1]}$	$\mathbb{K}=\mathbb{R}$	$F=\left\{f\in E\,/\,f \text{ admet une limite finie en } 0^+\right\}$

2. Soit $E=\mathbb{R}^3$. On note $a=(-1,2,1)$, $b=(0,1,-1)$, $u=(1,0,-3)$ et $v=(-2,5,1)$.
   (a) Déterminer x pour que $(x,1,2)$ soit élément de $\mathrm{Vect}(a,b)$.
   (b) Montrer que $\mathrm{Vect}(a,b)=\mathrm{Vect}(u,v)$.

3. Soit $E=\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ *(ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles)*;
   on considère $F=\{f\in E\,,\ f$ est paire $\}$ et $G=\{f\in E\,,\ f$ est impaire $\}$.
   Montrer que toute fonction de E peut s'écrire de façon unique comme somme d'un élément de F et d'un élément de G.

4. Soit $\mathscr{S}_3(\mathbb{R})\subset\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices symétriques de format 3×3.
   (a) Montrer que $\mathscr{S}_3(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
   (b) Donner une famille génératrice de $\mathscr{S}_3(\mathbb{R})$.

5. On pose $E=\mathbb{R}^4$ et $A=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4\,,\ x+y-z-t=0 \text{ et } x-y+z-t=0\right\}$.
   (a) Déterminer une famille génératrice de A.
   (b) La compléter pour obtenir une base de E.

6. Pour tout $p\in\mathbb{N}$, on considère $f_p : x\mapsto\cos(px)$. Démontrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, la famille $(f_p)_{0\leqslant p\leqslant n}$ est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

7. Soit $(P_0,P_1,\dots,P_n)$ une famille de polynômes de $\mathbb{K}_n[X]$ telle que : $\forall k\in[\![0;n]\!]$, $\deg(P_k)=k$.
   (a) Démontrer $(P_0,\dots,P_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
   (b) On définit les polynômes de $\mathbb{R}[X]$:

$$B_0=1 \qquad\qquad B_p=X(X-1)(X-2)\dots(X-p+1) \text{ pour } p\geqslant 1$$

   Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $(B_0,\dots,B_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

8. On se place dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E=\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Étudier la liberté éventuelle de la famille $((u_n),(v_n),(w_n))$ définie par :

$$\forall n\in\mathbb{N}\,,\ u_n=3^n \quad v_n=(-1)^n \quad w_n=3n$$