Transformée de Fourier
Une introduction

Jérémie Decock
http://www.jdhp.org

April 6, 2016

Résumé

TODO

Table des matières

Introduction

TODO

1 Cas simple : fonction périodique de période 2π

1.1 Définitions

1.1.1 Série de Fourier

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt))$$

1.1.2 Calcul des coefficients de Fourier

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\ dt \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\ dt \end{aligned}$$

Cf. section 6.2 pour des exemples de calculs de coefficients de Fourier.
Rappel : $\mathbb{N}^*$ est l'ensemble $\mathbb{N}$ privé de 0.

1.1.3 Condition de Dirichlet

...

1.2 Questions / notes / remarques

Que représente le terme $\frac{a_0}{2}$ dans la définition de la série de Fourier ?
...

Que représente le facteur $\frac{1}{\pi}$ dans les coeffients de Fourier ? ...

2 Cas général : fonction périodique de période T

2.1 Définition

Série de Fourier

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(\omega nt) + b_n \sin(\omega nt))$$

Calcul des *coefficients de Fourier*

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_n &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(\omega n t)\ dt \\
\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad b_n &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin(\omega n t)\ dt
\end{aligned}$$

3 Représentation complexe

...

4 Représentation spectrale

...

5 Conclusion

TODO...

5.1 Synthèse

Définitions à connaitre :
— *Série de Fourier*
— *Coefficients de Fourier*
— *Condition de Dirichlet*

6 Annexes

6.1 Rappels de maths

TODO : add plots...

$$\begin{aligned}
\forall c \in \mathbb{N}^*, \int_{-\pi}^{\pi} c\ dt &= c * 2\pi \\
\forall c \in \mathbb{N}^*, \int_{-\pi}^{\pi} c\cos(t)\ dt &= 0 \\
\forall c \in \mathbb{N}^*, \int_{-\pi}^{\pi} c\sin(t)\ dt &= 0
\end{aligned}$$

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, n \in \mathbb{N}^*, \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n\ t)\cos(m\ t)\ dt = \begin{cases} \pi & \text{si } n = m \\ 0 & \text{si } n \neq m \end{cases}$$

Par exemple :

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \cos(t)\cos(t)\ dt &= \pi \\
\int_{-\pi}^{\pi} \sin(t)\sin(t)\ dt &= \pi \\
\int_{-\pi}^{\pi} \cos(t)\sin(t)\ dt &= 0 \\
\int_{-\pi}^{\pi} \cos(t)\cos(2t)\ dt &= 0 \\
\int_{-\pi}^{\pi} \cos(t)\sin(2t)\ dt &= 0 \\
\int_{-\pi}^{\pi} \cos(2t)\cos(2t)\ dt &= \pi \\
\int_{-\pi}^{\pi} \sin(2t)\sin(2t)\ dt &= \pi
\end{aligned}$$

6.2 Exemples détaillés

6.2.1 Calcule des coefficients de Fourier pour la fonction $f(t) = 3$

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 3\cos(0)\ dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 3\ dt \\
&= \frac{1}{\pi} * 3 * 2\pi \\
&= 6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 3\cos(t)\ dt \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 3\sin(t)\ dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

De même, les coefficients a_3, b_3, a_4, b_4, etc. sont tous nuls.

Vérification On a bien :

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nt) + b_n\sin(nt)) \\ &= \frac{6}{2} + 0*\cos(t) + 0*\sin(t) + 0*\cos(2t) + 0*\sin(2t) + ... \\ &= 3 \end{aligned}$$

6.2.2 Calcule des coefficients de Fourier pour la fonction $f(t) = \cos(t)$

TODO : add plots...

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(t)\cos(0)\ dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(t)\ dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(t)\cos(t)\ dt \\ &= \frac{1}{\pi}*\pi \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(t)\sin(t)\ dt \\ &= \frac{1}{\pi}*0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_2 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(t)\cos(2t)\ dt \\
&= \frac{1}{\pi} * 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_2 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(t)\sin(2t)\ dt \\
&= \frac{1}{\pi} * 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

De même, les coefficients a_3, b_3, a_4, b_4, etc. sont tous nuls.

Vérification On a bien :

$$\begin{aligned}
f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nt) + b_n\sin(nt)) \\
&= \frac{0}{2} + 1 * \cos(t) + 0 * \sin(t) + 0 * \cos(2t) + 0 * \sin(2t) + ... \\
&= \cos(t)
\end{aligned}$$

6.2.3 Calcule des coefficients de Fourier pour la fonction $f(t) = 3\cos(t)$

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\ dt \\
&= ...
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\ dt \\
&= ...
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
b_1 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt)\ dt \\
&= \dots
\end{aligned}
$$

Conclusion

TODO

Références

[1] Horst Stöcker, Sandra Marcello, and Vincent Bosser. *Toutes les mathématiques et les bases de l'informatique*. Dunod, 2002.