Exercice 1

- Fonction exponentielle
- Equation différentielle

1. *L'équation* $e^{2x} - 3e^x - 4 = 0$ *admet dans* $\mathbb{R}$ ...
On pose $X = e^x$ et on a pour tout x réel :

$$\begin{aligned} e^{2x} - 3e^x - 4 = 0 &\iff (e^x)^2 - 3e^x - 4 = 0 \\ &\iff X^2 - 3X - 4 = 0. \end{aligned}$$

► **Première méthode**
$X^2 - 3X - 4 = 0$ a pour racine tout à fait évidente $X_1 = -1$
Soit X_2 la seconde racine.
On a : $X_1X_2 = \frac{c}{a} = \frac{-4}{1}$
d'où $X_2 = 4$.

► **Deuxième méthode (plus brutale!)**
Le calcul du discriminant nous donne :
$\Delta = b^2 - 4ac = 9 + 16 = 25 = 5^2 > 0$, d'où :

$$X_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3-5}{2} = -1 \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3+5}{2} = 4$$

On obtient donc :
$e^x = -1$, impossible car une exponentielle n'est jamais négative ou $e^x = 4$, c'est-à-dire $x = \ln 4 = 2\ln 2$.

$\boxed{\text{L'équation a donc une seule solution, réponse b.}}$

2. *L'expression* $-e^{-x}$...
On a :
$\forall x \in \mathbb{R} : e^{-x} > 0 \iff -e^{-x} < 0.$

$\boxed{\text{L'expression } -e^{-x} \text{ est toujours négative, réponse b.}}$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2e^x - 1}{e^x + 2} = \ldots$
On factorise par e^x au numérateur et dénominateur :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \frac{2e^x-1}{e^x+2} = \frac{e^x\left(2 - \frac{1}{e^x}\right)}{e^x\left(1 + \frac{2}{e^x}\right)} = \frac{2 - e^{-x}}{1 + 2e^{-x}}.$$

et $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} -x = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^X = 0 \end{cases}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2-e^{-x}}{1+2e^{-x}} = \frac{2}{1} = 2.$

$\boxed{\text{C'est la réponse c.}}$

4. *L'équation différentielle* $y = 2y' - 1$ *a pour ensemble de solutions...*
On a :

$$\begin{aligned} y = 2y' - 1 &\iff y + 1 = 2y' \\ &\iff y' = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

On reconnait la forme $y' = ay + b$ avec $a = b = \frac{1}{2}$, d'où : $\frac{b}{a} = 1$.
L'ensemble des solutions est donc :
$\left\{ f_k : x \mapsto ke^{\frac{1}{2}x} - 1 \text{ avec } k \in \mathbb{R} \right\}$.

$\boxed{\text{C'est la réponse c.}}$

Exercice 2

- Suites adjacentes

On définit sur $\mathbb{N}$ *les suites* (u_n) *et* (v_n) *par :* $u_0 = 0$, $v_0 = 12$, $u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3}$ *et* $v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}$.

1. *On considère la suite* (w_n) *définie, pour tout entier naturel* n, *par :* $w_n = v_n - u_n$. *Montrer que la suite* (w_n) *est géométrique.*
On a :

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= v_{n+1} - u_{n+1} \\ &= \frac{u_n + 3v_n}{4} - \frac{2u_n + v_n}{3} \\ &= \frac{3u_n + 9v_n}{12} - \frac{8u_n + 4v_n}{12} \\ &= \frac{-5u_n + 5v_n}{12} \\ &= \frac{5}{12}(v_n - u_n) \\ &= \frac{5}{12}w_n. \end{aligned}$$

$\boxed{(w_n) \text{ est géométrique de raison } \frac{5}{12} \text{ et de premier terme } w_0 = 12.}$

2. *Donner l'expression de* w_n *en fonction de l'entier naturel* n.
On a :
$\forall n \in \mathbb{N} : w_n = w_0 \times q^n$, donc, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} : w_n = 12 \times \left(\frac{5}{12}\right)^n.}$

3. *Déterminer la limite de la suite* (w_n).
(w_n) est une suite géométrique de raison $\frac{4}{12}$ et $\frac{4}{12}$ appartient à $]-1\,;1[$.

Finalement : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0.}$

4. *Démontrer que la suite* (u_n) *est croissante.* On a :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} - u_n &= \frac{2u_n + v_n}{3} - u_n \\ &= \frac{2u_n + v_n}{3} - \frac{3u_n}{3} \\ &= \frac{-u_n + v_n}{3} \\ &= \frac{1}{3}(v_n - u_n) \\ &= \frac{1}{3}w_n. \end{aligned}$$

Or : $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = 12 \times \left(\frac{5}{12}\right)^n$,
donc : $\forall n \in \mathbb{N} : w_n \geqslant 0 \iff \frac{1}{3}w_n \geqslant 0.$
Finalement : $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} - u_n \geqslant 0.$

$\boxed{(u_n) \text{ est croissante.}}$

5. *Etudier le sens de variation de la suite* (v_n). On a :

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N} : v_{n+1} - v_n &= \frac{u_n + 3v_n}{4} - v_n \\ &= \frac{u_n + 3v_n}{4} - \frac{4v_n}{4} \\ &= \frac{u_n - v_n}{4} \\ &= -\frac{1}{4}(v_n - u_n) \\ &= -\frac{1}{4} w_n.\end{aligned}$$

Or : $\forall n \in \mathbb{N} : w_n \geqslant 0 \iff -\frac{1}{4} w_n \leqslant 0$.

Finalement : $\forall n \in \mathbb{N} : v_{n+1} - v_n \leqslant 0$.

$\boxed{(v_n) \text{ est décroissante.}}$

6. *Que peut-on déduire des résultats précédents quand à la convergence des suites* (u_n) *et* (v_n) *?* On a :

$$\begin{cases} (u_n) \text{ est croissante ;} \\ (v_n) \text{ est décroissante ;} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n - u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0. \end{cases}$$

donc (u_n) et (v_n) sont adjacentes, elles convergent vers la même limite ℓ.

7. *On considère la suite* (t_n)*, définie pour tout entier naturel* n*, par :* $t_n = 3u_n + 4v_n$*. Montrer que la suite* (t_n) *est constante.*

On a :

$$\begin{aligned} t_{n+1} &= 3u_{n+1} + 4v_{n+1} \\ &= 3 \times \frac{2u_n + v_n}{3} + 4 \times \frac{u_n + 3v_n}{4} \\ &= 2u_n + v_n + u_n + 3v_n \\ &= 3u_n + 4v_n \\ &= t_n. \end{aligned}$$

$\boxed{(t_n) \text{ est constante et : } \forall n \in \mathbb{N}, t_n = t_0 = 4 \times 12 = 48.}$

8. *Déterminer les limites des suites* (u_n) *et* (v_n)*.*

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$, donc :

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} t_n &= 3\ell + 4\ell \\ &= 7\ell. \end{aligned}$$

Or : $\forall n \in \mathbb{N}, t_n = 36$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = 36$

et : $7\ell = 48 \iff \ell = \frac{48}{7}$.

$\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \frac{48}{7}.}$

Exercice 3

- Equation différentielle

Un million de bactéries sont introduites dans un milieu de culture à l'instant $t = 0$.

Soit $g(t)$ *le nombre de bactéries, exprimé en millions, à l'instant* t*, exprimé en heures. On a donc* $g(0) = 1$.

On a établi que la fonction g*, définie et dérivable sur* $[0\,;+\infty[$*, est une solution de l'équation différentielle* (E) *:* $y' = 1,2y\,(1 - 0,2y)$.

1. *Résoudre l'équation différentielle* (E_0) *:* $y' = -1,2y + 0,24$.

(E_0) est une équation différentielle de la forme $y' = ay + b$ avec $a = -1,2$ et $b = 0,24$, ainsi $\frac{b}{a} = -0,2$.

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est donc } \left\{ f_C : x \mapsto C\mathrm{e}^{-1,2x} + 0,2 \ \text{ avec } \ C \in \mathbb{R} \right\}.}$

2. *On admet que* g *ne s'annule pas sur* $[0\,;+\infty[$ *et on pose* $h = \frac{1}{g}$*. Montrer que* g *est solution de l'équation différentielle* (E) *si et seulement si* h *est solution de l'équation différentielle* (E_0).

► **Une première solution**

g est dérivable et ne s'annule pas sur $[0\,;+\infty[$, donc h est définie et dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et : $h' = -\frac{g'}{g^2}$.

Ainsi

$$\begin{aligned} g \text{ solution de } (E) &\iff g' = 1,2g\,(1 - 0,2g) \\ &\iff g' = 1,2g - 0,24g^2 \\ &\iff \frac{g'}{g^2} = 1,2\frac{g}{g^2} - 0,24 \\ &\qquad (g \text{ ne s'annule pas}) \\ &\iff -\frac{g'}{g^2} = -1,2\frac{1}{g} + 0,24 \\ &\iff h' = -1,2h + 0,24 \\ &\iff h \text{ est solution de } (E_0). \end{aligned}$$

$\boxed{\begin{array}{l} g \text{ est solution de l'équation différentielle } (E) \text{ si et seulement} \\ \text{si } h \text{ est solution de l'équation différentielle } (E_0). \end{array}}$

► **Une autre solution (légère variante!**

g est dérivable et ne s'annule pas sur $[0\,;+\infty[$, donc $h = \frac{1}{g}$ est définie et dérivable sur $[0\,;+\infty[$

et : $g' = -\frac{h'}{h^2}$.

Ainsi :

$$\begin{aligned} g \text{ solution de } (E) &\iff g' = 1,2g\,(1 - 0,2g) \\ &\iff g' = 1,2g - 0,24g^2 \\ &\iff -\frac{h'}{h^2} = 1,2\frac{1}{h} - 0,24\left(\frac{1}{h^2}\right) \\ &\iff h' = -1,2h + 0,24 \\ &\iff h \text{ est solution de } (E_0). \end{aligned}$$

3. *Déduire des questions précédentes que la fonction* g *est définie, sur* $[0\,;+\infty[$*, par :*

$$g(t) = \frac{1}{0,2 + 0,8\mathrm{e}^{-1,2t}}.$$

D'après la question précédente :

$\forall t \in [0\,;+\infty[: h(t) = \frac{1}{g(t)}$.

Or, pour tout t dans $[0\,;+\infty[$, g ne s'annule pas, donc h ne s'annule pas. Finalement :

$\forall t \in [0\,;+\infty[: g(t) = \frac{1}{h(t)}$, avec h solution de (E_0).

D'après la question **1**, on obtient :

$g(t) = \frac{1}{C\mathrm{e}^{-1,2t} + 0,2}$.

La condition initiale nous donne :

$$\begin{aligned} g(0) = 1 &\iff \frac{1}{C\mathrm{e}^{-1,2\times 0} + 0,2} = 1 \\ &\iff \frac{1}{C + 0,2} = 1 \\ &\iff C + 0,2 = 1 \text{ et } C \neq -0,2 \\ &\iff C = 0,8. \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Donc, } g(t) = \frac{1}{0,2 + 0,8\mathrm{e}^{-1,2t}} \text{ sur } [0\,;+\infty[.}$

4. *Déterminer le sens de variation de* g*.* g est définie et dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et :

$$\begin{aligned} g'(t) &= -\frac{0,8 \times (-1,2)\,\mathrm{e}^{-1,2t}}{(0,2 + 0,8\mathrm{e}^{-1,2t})^2} \\ &= \frac{0,96\mathrm{e}^{-1,2t}}{(0,2 + 0,8\mathrm{e}^{-1,2t})^2}. \end{aligned}$$

Une exponentielle étant toujours strictement positive, $g'(t)$ est strictement positif pour tout t de $[0\,;+\infty[$.

$\boxed{g \text{ est croissante sur } [0\,;+\infty[.}$

5. *Déterminer* $\lim\limits_{x\to+\infty} g(t)$. *Interpréter ce résultat.*

On a :

$$\left\{\begin{array}{lcl}\lim\limits_{t\to+\infty} -1,2t & = & -\infty \\ \lim\limits_{T\to-\infty} e^T & = & 0\end{array}\right.$$

et $$\boxed{\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{1}{0,2+0,8e^{-1,2t}} = \frac{1}{0,2} = 5.}$$

▸ **Interprétation géométrique :** la droite d'équation $y=5$ est une asymptote horizontale à la courbe $\mathscr{C}_g$ en $+\infty$.

▸ **Interprétation biologique :** le nombre de bactéries tend vers 5 millions (et ne le dépassera pas).

6. *Déterminer l'instant t où la population de bactéries aura doublé ?*

A l'instant 0 ($t=0$), il y a avait 1 million de bactéries, on doit donc résoudre : $g(t)\geqslant 2$.

$$g(t)\geqslant 2 \iff \frac{1}{0,2+0,8e^{-1,2t}} \geqslant 2.$$

Or : $\forall t\in[0\,;+\infty[, 0,2+0,8e^{-1,2t}>0$, donc :

$$\begin{array}{rcl} g(t)\geqslant 2 & \iff & 1\geqslant 2\left(0,2+0,8e^{-1,2t}\right) \\ & \iff & 1\geqslant 0,4+1,6e^{-1,2t} \\ & \iff & \dfrac{0,6}{1,6}\geqslant e^{-1,2t} \\ & \iff & \ln(0,375)\geqslant -1,2t \\ & \iff & \dfrac{\ln(0,375)}{-1,2}\leqslant t \\ & \iff & t\geqslant 0,817. \end{array}$$

En arrondissant grossièrement, on tombe sur 1 heure, plus finement : $\boxed{\text{la population a doublé au bout d'environ 49 minutes.}}$

Variante (juste pour le plaisir!)

$$\begin{array}{rcl} g(t)\geqslant 2 & \iff & \dfrac{1}{0,2+0,8e^{-1,2t}}\geqslant 2 \\ & \iff & 0,2+0,8e^{-1,2t}\leqslant \dfrac{1}{2} \\ & \iff & 0,8e^{-1,2t}\leqslant 0,3 \\ & \iff & e^{-1,2t}\leqslant \dfrac{0,3}{0,8} \\ & \iff & -1,2t\leqslant \ln\left(\dfrac{0,3}{0,8}\right) \\ & \iff & t\geqslant \dfrac{\ln(0,375)}{-1,2}. \end{array}$$

Exercice 4

• Fonction logarithme

– Partie A –

Soit f_1 la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f_1(x)=x-1-\dfrac{\ln x}{x}$ et $\mathscr{C}_1$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. *Soit g_1 la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $g_1(x)=x^2-1+\ln x$. Etudier les variations de la fonction g_1.*

▸ **Méthode fine :**

- la fonction $x\mapsto x^2-1$ est croissante sur $]0\,;+\infty[$;
- la fonction $x\mapsto \ln x$ est croissante sur $]0\,;+\infty[$;

Par somme de fonction croissante sur $]0\,;+\infty[$, g_1 est croissante sur $]0\,;+\infty[$

▸ **Méthode classique :**

g_1 est définie et dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et :

$$\begin{array}{rcl} g_1'(x) & = & 2x+\dfrac{1}{x} \\ & = & \dfrac{2x^2+1}{x}>0, \forall x>0. \end{array}$$

$\boxed{g_1 \text{ est croissante sur }]0\,;+\infty[.}$

Calculer $g_1(1)$, en déduire le signe de $g_1(x)$ suivant les valeurs de x.

Immédiatement : $g_1(1)=1^2-1+\ln 1=0$.

On en déduit le tableau incomplet des variations (pas de limites) de g_1 :

x	0	1	$+\infty$
$g_1'(x)$	‖	$+$	
$g_1(x)$	‖	↗ 0	

On en déduit le tableau de signes de g_1 :

x	0		1		$+\infty$
$g_1(x)$	‖	$-$	0	$+$	

2. *Calculer les limites de f_1 en 0 et en $+\infty$.*

• **Limite en 0 :** on a,

$$\left\{\begin{array}{lcl}\lim\limits_{x\to0}\ln x & = & -\infty \\ \lim\limits_{x\to0} x & = & 0^+\end{array}\right. \text{ donc } \lim\limits_{x\to0}\frac{\ln x}{x}=-\infty.$$

D'autre part, $$\left\{\begin{array}{lcl}\lim\limits_{x\to0} -\dfrac{\ln x}{x} & = & +\infty \\ \lim\limits_{x\to0} x-1 & = & -1\end{array}\right. \text{ donc } \boxed{\lim\limits_{x\to0} f_1(x)=+\infty.}$$

• **Limite en $+\infty$:** on a,

$$\left\{\begin{array}{lcl}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x} & = & 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x-1 & = & +\infty\end{array}\right. \text{ donc } \boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x)=+\infty.}$$

3. *Etudier les variations de f_1.*

f_1 est définie et dérivable sur $]0\,;+\infty[$ avec :

$$\left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{\frac{1}{x}\times x-1\times\ln x}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}.$$

D'où, $\forall x\in]0\,;+\infty[$:
$$\begin{array}{rcl} f_1'(x) & = & 1-\dfrac{1-\ln x}{x^2} \\ & = & \dfrac{x^2-1+\ln x}{x^2} \\ & = & \dfrac{g_1(x)}{x^2}. \end{array}$$

Un carré étant toujours positif dans $\mathbb{R}$, $f_1'(x)$ est du signe de $g_1(x)$, on en déduit le tableau des variations de f_1 :

x	0		1		$+\infty$
$f_1'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f_1(x)$	‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

$$f_1(1) = 1-1-\frac{\ln 1}{1}=0.$$

4. *Montrer que la droite $\mathscr{D}_1$ d'équation $y=x-1$ est asymptote à $\mathscr{C}_1$ en $+\infty$.* On calcule :

$$\begin{array}{rcl} f_1(x)-(x-1) & = & x-1-\dfrac{\ln x}{x}-x+1 \\ & = & -\dfrac{\ln x}{x}. \end{array}$$

Et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x)-(x-1)=0$.

$\boxed{\text{La droite } \mathscr{D}_1 \text{ d'équation } y=x-1 \text{ est asymptote à } \mathscr{C}_1 \text{ en } +\infty.}$

Etudier la position relative de $\mathscr{C}_1$ par rapport à $\mathscr{D}_1$.

On étudie le signe de $f_1(x)-(x-1)$:

▸ $$\begin{array}{rcl} f_1(x)-(x-1)=0 & \iff & -\dfrac{\ln x}{x}=0 \\ & \iff & \ln x=0 \text{ et } x\neq 0 \\ & \iff & x=1. \end{array}$$

► $$\begin{aligned} f_1(x)-(x-1)>0 &\iff -\frac{\ln x}{x}>0 \\ &\iff \frac{\ln x}{x}<0 \\ &\iff \ln x<0 \text{ car } x>0 \\ &\iff x<1. \end{aligned}$$

- $\mathscr{C}_1$ est au-dessus de $\mathscr{D}_1$ pour x appartenant à $]0\,;1[$
- $\mathscr{C}_1$ est au-dessous de $\mathscr{D}_1$ pour x appartenant à $]1\,;+\infty[$
- $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{D}_1$ ont un point d'intersection pour $x=1$.

$\mathscr{C}_1$ admet-elle une autre asymptote ?
$\lim\limits_{x\to 0} f_1(x)=+\infty$, donc la droite d'équation $x=0$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$.

– Partie B –

Pour tout entier naturel non nul n, on définit sur $]0\,;+\infty[$ la fonction f_n par : $f_n(x)=x-n-n\dfrac{\ln x}{x}$ et on nomme $\mathscr{C}_n$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. *Soit g_n la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $g_n(x)=x^2-n+n\ln x$.*

a. *Etudier les variations de la fonction g_n.*
g_n est définie et dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et :

$$\begin{aligned} g'_n(x) &= 2x+n\times\frac{1}{x}=2x+\frac{n}{x} \\ &= \frac{2x^2+n}{x}>0, \forall x>0. \end{aligned}$$

b. *Déterminer ses limites en 0 et en $+\infty$.*

• **Limite en 0 :** on a,

$$\left\{\begin{array}{lcl} \lim\limits_{x\to 0} n\ln x &=& -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0} x^2-n &=& -n \end{array}\right. \text{ donc } \boxed{\lim_{x\to 0} g_n(x)=-\infty.}$$

• **Limite en $+\infty$:** on a,

$$\left\{\begin{array}{lcl} \lim\limits_{x\to+\infty} n\ln x &=& +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x^2-n &=& +\infty \end{array}\right. \text{ donc } \boxed{\lim_{x\to+\infty} g_n(x)=+\infty.}$$

Dresser son tableau de variation. On en déduit le tableau suivant :

x	0		α_n		$+\infty$
$g'_n(x)$	‖		$+$		
$g_n(x)$	‖	$-\infty$	$\nearrow$ 0		$+\infty$

c. *Montrer que l'équation $g_n(x)=0$ admet une unique solution α_n et que : $\alpha_n\in[1\,;\mathrm{e}]$.*

• **Version bac :** d'après le tableau des variations, l'équation $g_n(x)=0$ admet une unique solution α_n dans $]0\,;+\infty[$.

• **Version maths :** la fonction g_n est <u>continue</u> et <u>strictement</u> croissante sur $]0\,;+\infty[$.
De plus $\lim\limits_{x\to 0} g_n(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g_n(x)=+\infty$, donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, li existe un unique réel, noté α_n, dans $]0\,;+\infty[$, tel que $g_n(\alpha_n)=0$.

En outre, $g_n(1)=1^2-n+n\ln 1=1-n\leqslant 0$ pour $n\geqslant 0$ et, $g_n(\mathrm{e})=\mathrm{e}^2-n+n\ln\mathrm{e}=\mathrm{e}^2>0$.
Donc, $g_n(1)g_n(e)<0$ et : $\boxed{\alpha_n\in[0\,;\mathrm{e}].}$

d. *Déterminer le signe de $g_n(x)$ suivant les valeurs de x.* Des questions précédentes, on déduit le tableau de signes de g_n :

x	0		α_n		$+\infty$
$g_n(x)$	‖	$-$	0	$+$	

2. *Déterminer les limites de f_n en 0 et en $+\infty$.*

• **Limite en 0 :** on a,

$$\left\{\begin{array}{lcl} \lim\limits_{x\to 0}\ln x &=& -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0} x &=& 0^+ \end{array}\right. \text{ donc } \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{x}=-\infty.$$

D'autre part, $\left\{\begin{array}{lcl} \lim\limits_{x\to 0} -n\dfrac{\ln x}{x} &=& +\infty \\ \lim\limits_{x\to 0} x-n &=& -n \end{array}\right.$ donc

$$\boxed{\lim_{x\to 0} f_n(x)=+\infty.}$$

• **Limite en $+\infty$:** on a,

$$\left\{\begin{array}{lcl} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x} &=& 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x-n &=& +\infty \end{array}\right. \text{ donc } \boxed{\lim_{x\to+\infty} f_n(x)=+\infty.}$$

3. *Calculer $f'_n(x)$ et justifier que $f'_n(x)$ a le signe de $g_n(x)$ sur $]0\,;+\infty[$.*
f_n est définie et dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et :

$$\left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{\frac{1}{x}\times x-1\times\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}.$$

$$\begin{aligned} \text{D'où, } \forall x\in]0\,;+\infty[:f'_n(x) &= 1-n\frac{1-\ln x}{x^2} \\ &= \frac{x^2-n+n\ln x}{x^2} \\ &= \frac{g_n(x)}{x^2}. \end{aligned}$$

Un carré étant toujours positif dans $\mathbb{R}$, $f'_n(x)$ est du signe de $g_n(x)$.

Etudier les variations de f_n et dresser son tableau de variation.

x	0		α_n		$+\infty$
$f'_n(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f_n(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	$f_1(\alpha_n)$	$\nearrow$	$+\infty$

4. *Montrer que $\mathscr{C}_n$ admet une asymptote oblique $\mathscr{D}_n$.*
Soit $\mathscr{D}_n$ la droite d'équation $y=x-n$, on a alors :

$$\begin{aligned} f_n(x)-(x-n) &= x-n-n\frac{\ln x}{x}-x+n \\ &= -n\frac{\ln x}{x}. \end{aligned}$$

Et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)-(x-n)=0$.

$\boxed{\text{La droite } \mathscr{D}_n \text{ d'équation } y=x-n \text{ est asymptote à } \mathscr{C}_n \text{ en } +\infty.}$