IRIS 2 – devoir à la maison n° 4

À rendre jeudi 20 mars 2014

Partie A

Un signal est modélisé par une fonction f, paire et périodique de période 2π, définie pour tout nombre réel t par :

$$\begin{cases} f(t) = \dfrac{\pi}{2} - t \ \text{ si } \ t \in \left[0 \,;\, \frac{\pi}{2}\right[\\ f(t) = 0 \qquad \text{ si } \ t \in \left[\frac{\pi}{2} \,;\, \pi\right]. \end{cases}$$

1. Représenter graphiquement la fonction f sur l'intervalle $[-2\pi\,;\,4\pi]$.
   On pourra utiliser un logiciel de géométrie dynamique comme GeoGebra disponible ici :
   `http://www.geogebra.org/cms/fr`.
2. On admet que la fonction f est développable en série de FOURIER.
   Dans la suite de l'exercice, a_0, a_n et b_n désignent les coefficients du développement en série de FOURIER de la fonction f, avec les notations du formulaire.
   a. Démontrer que $a_0 = \dfrac{\pi}{8}$.
   b. Justifier que $b_n = 0$ pour tout nombre entier n supérieur ou égal à 1.
   c. On pose :
   $$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - t\right)\cos(t)\mathrm{d}t.$$
   À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I = 1$.
   d. En déduire la valeur exacte de a_1.
3. On pose $A_0 = a_0$. Pour tout nombre entier naturel n supérieur ou égal à 1, on note A_n l'amplitude de l'harmonique de rang n. On rappelle que $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$.
   a. Sur la figure 1 de l'annexe, on a construit le diagramme en bâtons donnant A_n^2 en fonction de n jusqu'à $n = 4$.
   Pour tout nombre entier $n \geqslant 4$, l'amplitude A_n est négligeable.
   À l'aide de ce diagramme, compléter le tableau 1 du document réponse avec des valeurs approchées à 10^{-2} près.
   b. On note P la puissance moyenne du signal modélisé par la fonction f, exprimée en fonction de ses coefficients de FOURIER. D'après la formule de BESSEL-PARSEVAL, on a :
   $$P = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right).$$
   Déduire de la question précédente une valeur approchée de P.

Partie B

On considère la fonction g, définie pour tout nombre réel t par :

$$g(t) = \frac{\pi}{8} + \frac{2}{\pi}\cos(t) + \frac{1}{\pi}\cos(2t) + \frac{2}{9\pi}\cos(3t).$$

1. a. Calculer la dérivée g' de la fonction g.

   b. On pose $x_k = \dfrac{k\pi}{3}$, k étant un nombre entier.

   Calculer les valeurs exactes de $g'(x_k)$ pour $k \in \{0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\}$.

   On présentera les résultats dans un tableau.

2. Sur la figure 2 de l'annexe, on a représenté graphiquement la fonction g'.

   À l'aide de ce graphique et de la question 1, compléter le tableau de variation de la fonction g sur le document réponse. On pourra donner une valeur approchée à 10^{-2} près de l'extremum.

3. Construire la courbe représentative de la fonction g sur $[-2\pi\ ;\ 4\pi]$ sur la même figure que la représentation graphique de f.

4. Un étudiant se propose d'afficher sur sa calculatrice la courbe représentative de la fonction g. Parmi les trois réglages suivants de la fenêtre de sa calculatrice, lequel vous semble le plus adapté ? Justifier.

	Réponse 1	Réponse 2	Réponse 3
X min	0	0	0
X max	π	π	π
Y min	-2	0	$-0,1$
Y max	2	2	1,5

Annexe

Figure 1

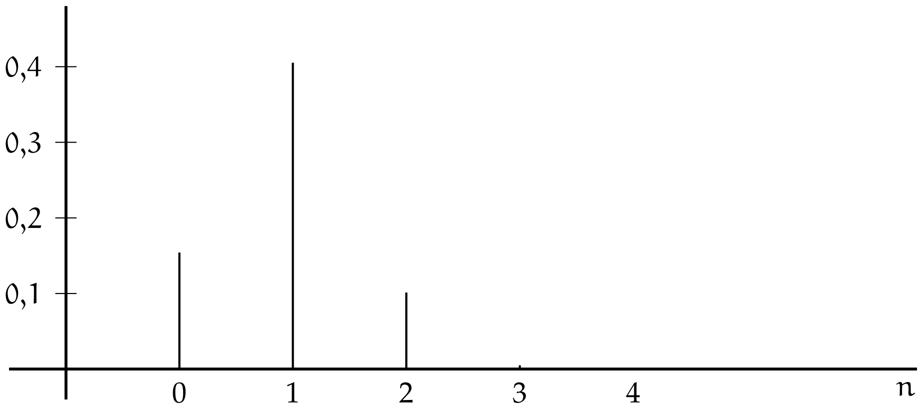
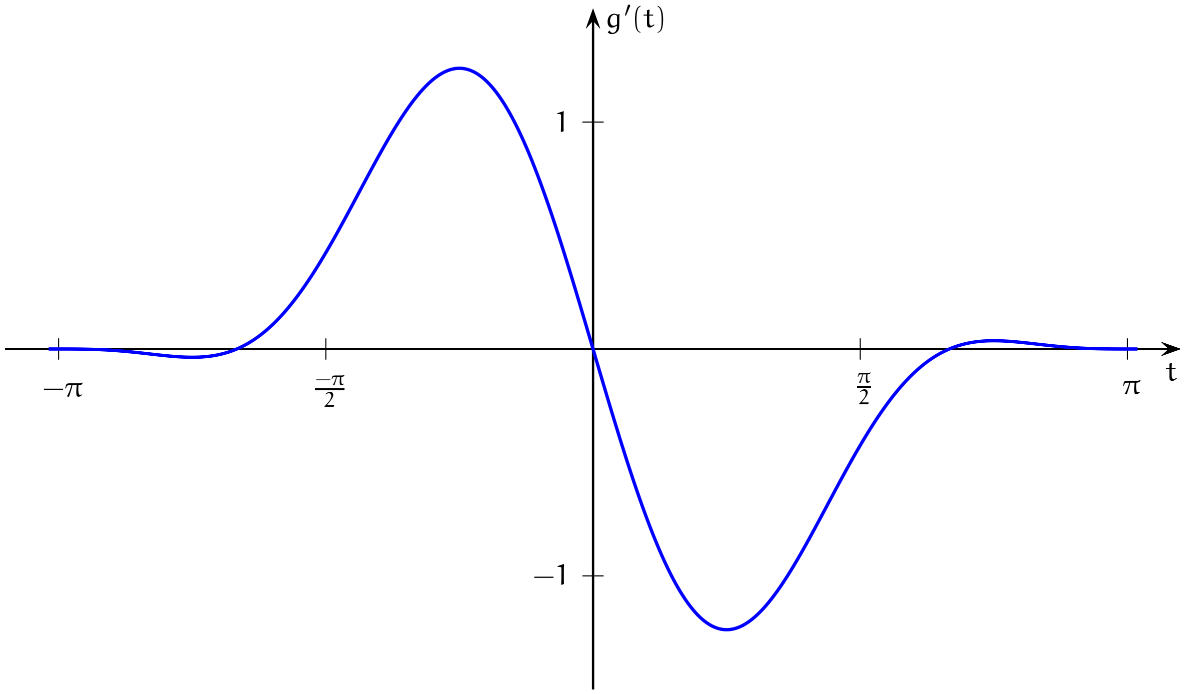


Figure 2



NOM : ....
Prénom : ....

Document réponse

Tableau 1

n	0	1	2	3	4
A_n^2	0,15			0,01	0,00

Tableau de variation de la fonction g

t	0	π
$g'(t)$	0	0
$g(t)$		