Exercices sur la transformation en $\mathcal{Z}$

Pour tous les exercices, e désigne l'échelon unité discret causal défini pour tout entier n par :

$$e(n) = \begin{cases} 1 \text{ si } n \geqslant 0 \\ 0 \text{ si } n < 0 \end{cases}$$

Calculs de transformées en $\mathcal{Z}$

Pour les exercices 1 à 4, calculer la transformée en $\mathcal{Z}$ du signal donné.

Exercice 1

1. $x(n) = n^2 + 2n$ avec $n \in \mathbb{N}$.
2. $y(n) = (n-1)e(n-1)$.

Exercice 2

1. $x(n) = n^2 + 4n + 4$ avec $n \in \mathbb{N}$.
2. $y(n) = (n+2)^2 e(n+2)$.

Pourquoi obtient-on le même résultat ?

Exercice 3

1. $x(n) = e^{2in} = \exp(2in)$ avec $n \in \mathbb{N}$.
2. $y(n) = e^{2i(n-1)}e(n-1) = \exp(2i(n-1))e(n-1)$.

Exercice 4

1. $x(n) = 3^n \times n^2$ avec $n \in \mathbb{N}$.
2. $y(n) = ne(n-1)$.

Calculs d'originaux

Dans les exercices 5 et 6, calculer l'original de la transformée en $\mathcal{Z}$ donnée.

Exercice 5

1. $X(z) = \dfrac{2}{z-3}$.
2. $Y(z) = \dfrac{3z}{2z+1}$.

Exercice 6

1. $X(z) = \dfrac{z}{z^2 - 3z + 2}$.
2. $Y(z) = \dfrac{z+1}{z^2 + z - 2}$.

Dans les exercices 7 et 8, calculer les premiers termes de l'original en procédant par division de polynômes.

Exercice 7

1. $X(z) = \dfrac{z}{z^2 + 2z - 3}$.
2. $Y(z) = \dfrac{z^2}{z^2 - z - 2}$.

Exercice 8

1. $X(z) = \dfrac{z-1}{z^2+1}$.
2. $Y(z) = \dfrac{2z}{z^2-1}$.

Applications aux suites récurrentes

Exercice 9

On considère la suite u définie pour tout entier naturel n par :

$$u(n+2) = 4u(n+1) - 4u(n)$$

avec $u(0) = 0$ et $u(1) = 1$.

1. Calculer $u(2)$, $u(3)$ et $u(4)$.
2. Déterminer l'expression de $u(n)$ en fonction de l'entier naturel n en utilisant la transformation en $\mathcal{Z}$.
3. Vérifier les valeurs de $u(n)$ pour $n = 0, 1, \ldots, 4$.

Exercice 10

Reprendre les questions de l'exercice 9 pour la suite x définie pour tout entier naturel n par :

$$x(n+2) = 3x(n+1) + 4x(n)$$

avec $x(0) = 0$ et $x(1) = 1$.

Exercice 11

Reprendre les questions de l'exercice 9 pour la suite v définie pour tout entier naturel n par :

$$v(n+2) + 2v(n+1) + v(n) = n$$

avec $v(0) = 0$ et $v(1) = 1$.

On vérifiera que, pour tout z tel que $|z| > 1$:

$$(\mathcal{Z}v)(z) = \frac{5z}{4(z+1)^2} + \frac{z}{4(z+1)} + \frac{z}{4(z-1)^2} - \frac{z}{4(z-1)}.$$

Équations aux différences

Exercice 12

On considère le signal discret causal y vérifiant :

$$y(n) + 2y(n-1) = e(n).$$

1. Calculer $y(0)$ et $y(1)$.
2. Montrer que la transformée en $\mathcal{Z}$ de y notée Y est :
$$Y(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z+2)}.$$
3. Montrer que, pour tout z tel que $|z| > 2$, on a :
$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{z-1} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{z+2}.$$
4. En déduire le signal y.

Problème donné à l'examen

Exercice 13

Dans tout cet exercice, le nombre n est un entier relatif.
La suite $n \longmapsto e(n)$ représente l'échelon discrétisé causal défini par :

$$\begin{cases} e(n) = 0 \text{ pour } n < 0 \\ e(n) = 1 \text{ pour } n \geqslant 0 \end{cases}$$

On considère un filtre numérique dans lequel le signal d'entrée est $n \longmapsto e(n)$ et le signal de sortie est un signal discret causal noté $n \mapsto x(n)$.
Ce filtre est régi par l'équation récurrente :

$$x(n) - 2x(n-1) = e(n) \quad (E).$$

Partie 1

Dans cette partie, on résout l'équation récurrente (E) sans utilisation de la transformation en $\mathcal{Z}$.

1. a. Justifier que $x(0) = 1$.
   b. Calculer $x(1)$, $x(2)$ et $x(3)$.
2. Pour tout entier naturel n l'équation (E) s'écrit :
$$x(n) - 2x(n-1) = 1 \quad (E).$$
   a. On considère la suite y définie pour tout entier naturel n par :
$$y(n) = x(n) + 1.$$
   Montrer que la suite y est une suite géométrique de raison 2.
   Donner l'expression de $y(n)$ en fonction de de l'entier naturel n.
   b. En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de $x(n)$. Vérifier que l'on retrouve les mêmes valeurs de $x(0)$, $x(1)$, $x(2)$ et $x(3)$ qu'à la première question.

Partie 2

Dans cette partie on résout l'équation récurrente (E) en utilisant la transformation en $\mathcal{Z}$.

1. On rappelle que $x(0) = 1$.
   On se place dans le cas où $n \geqslant 1$ et on admet que le signal $n \longmapsto x(n)$, solution de l'équation récurrente (E), a une transformée en $\mathcal{Z}$ notée $(\mathcal{Z}x)(z)$.
   a. Montrer que pour tout z différent de 0, de 1 et de 2 on a :
$$(\mathcal{Z}x)(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z-2)}.$$
   b. Montrer que pour tout z différent de 0, de 1 et de 2 on a :
$$\frac{(Zx)(z)}{z} = \frac{-1}{z-1} + \frac{2}{z-2}.$$
   c. En déduire par lecture inverse du dictionnaire d'images, le signal de sortie $n \longmapsto x(n)$ pour $n \geqslant 1$.
2. Représenter dans un repère orthogonal, pour les nombres entiers n tels que $-2 \leqslant n \leqslant 3$, le signal de sortie $n \longmapsto x(n)$. Prendre comme unités graphiques 2 cm sur l'axe des abscisses et 0,5 cm sur l'axe des ordonnées.