Terminale S_4 – exercices sur le calcul intégral et la fonction exponentielle

EXERCICE 1

Résoudre dans l'ensemble des nombres réels les équations et les inéquations suivantes :

① $e^{2x} = 1$; ② $e^{x} = e^{-x}$; ③ $e^{-x} + 2 \leqslant 0$; ④ $3e^{2x} - 2e^{x} - 1 \geqslant 0$.

EXERCICE 2

On considère la fonction numérique f définie pour tout réel x par $f(x) = x - 1 + xe^{-x}$.

1. On note f' et f'' les dérivées première et seconde de f (f'' est la dérivée de f').
   a. Calculer $f'(x)$ et montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f''(x) = (x-2)e^{-x}$.
   b. Déterminer le sens de variation de f' puis son signe (on ne demande pas de calculer les limites de f' en $+\infty$ et en $-\infty$).
2. a. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
   b. Dresser le tableau de variations de f.
3. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution dans $\mathbb{R}$ et donner une approximation décimale de cette solution à 10^{-3} près.

EXERCICE 3

On pose $I_0 = \displaystyle\int_0^1 e^{1-x}dx$ et pour tout entier naturel n non nul :

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x}dx.$$

1. Calculer la valeur exacte de I_0.
2. Déterminer pour tout entier naturel n la dérivée de la fonction $x \longmapsto f_n(x) = x^{n+1}e^{1-x}$.
3. En déduire que pour tout entier naturel n, $I_{n+1} = -1 + (n+1)I_n$.
4. Calculer les valeurs exactes de I_1 et I_2.

EXERCICE 4 – formule des trois niveaux

Exercice à traiter pour votre culture générale.

1. P étant une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à 3, a et b étant deux nombres réels tels que $a < b$, démontrer la formule « des trois niveaux » :

$$\int_a^b P(x)dx = \frac{b-a}{6}\left[P(a) + 4P\left(\frac{a+b}{2}\right) + P(b)\right].$$

2. Pourquoi cette formule s'appelle la formule « des trois niveaux » ?