Méthodes numériques II : Calcul différentiel

INFO1 - Semaines 7 & 8

Guillaume CONNAN

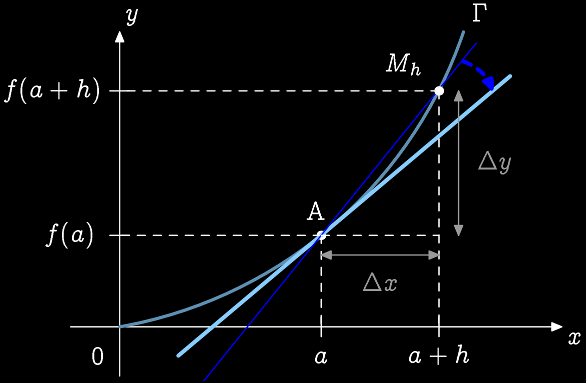
IUT de Nantes - Dpt d'informatique

Dernière mise à jour : 18 février 2014 à 23:29

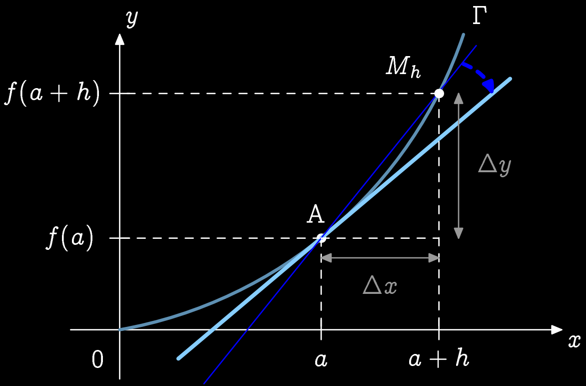
Sommaire

Sommaire

Jean Bernoulli (1691), **les infiniment petits sont des quantités qui peuvent être ajoutées à des quantités finies sans changer leurs valeurs. Les courbes sont des polygones à côtés infiniment courts.**



Jean Bernoulli (1691), **les infiniment petits sont des quantités qui peuvent être ajoutées à des quantités finies sans changer leurs valeurs. Les courbes sont des polygones à côtés infiniment courts.**



Théorème 1 (Dérivation d'une combinaison linéaire)

$$y = au + bv \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = a \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + b \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} \text{ ou bien } y' = a \cdot u' + b \cdot v'$$

Théorème 2 (Dérivation d'un produit)

$$y = u \cdot v \Longrightarrow$$

$$\frac{1}{1-10^{-5}} \approx 1{,}0000100001 = 1 + 10^{-5} + 10^{-10}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + \delta$$

$$1 = 1 - x + \delta(1-x)$$

$$\delta = x + \delta x$$

$$\frac{1}{1-x} \approx 1 + x$$

$$\frac{1}{1-10^{-5}} \approx 1,0000100001 = 1+10^{-5}+10^{-10}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1+\delta$$

$$1 = 1-x+\delta(1-x)$$

$$\delta = x+\delta x$$

$$\frac{1}{1-x} \approx 1+x$$

$$\frac{1}{1-10^{-5}} \approx 1{,}0000100001 = 1 + 10^{-5} + 10^{-10}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + \delta$$

$$1 = 1 - x + \delta(1-x)$$

$$\delta = x + \delta x$$

$$\frac{1}{1-x} \approx 1 + x$$

$$\frac{1}{1-10^{-5}} \approx 1{,}0000100001 = 1 + 10^{-5} + 10^{-10}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + \delta$$

$$1 = 1 - x + \delta(1-x)$$

$$\delta = x + \delta x$$

$$\frac{1}{1-x} \approx 1 + x$$

$$\frac{1}{1-10^{-5}} \approx 1,0000100001 = 1 + 10^{-5} + 10^{-10}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + \delta$$

$$1 = 1 - x + \delta(1-x)$$

$$\delta = x + \delta x$$

$$\frac{1}{1-x} \approx 1 + x$$

En 1593, François Viète établit avec une méthode similaire que, pour tout réel x tel que $|x| < 1$, on a :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \cdots$$

Théorème 3 (Dérivation d'un quotient)

$$y = \frac{u}{v} \Longrightarrow$$

Théorème 4 (Dérivation de fonctions composées)

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z} \cdot \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} \quad \textit{ou} \quad h'(x) = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$$

Sommaire

Si x_n est une approximation strictement positive par défaut de $\sqrt{a}$, alors a/x_n est une approximation par excès de $\sqrt{a}$ (pourquoi ?) et vice-versa.
La moyenne arithmétique de ces deux approximations est $\frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$ et constitue une meilleure approximation que les deux précédentes.
On peut montrer c'est une approximation par excès (en développant $(x_n - \sqrt{a})^2$ par exemple).

Si x_n est une approximation strictement positive par défaut de $\sqrt{a}$, alors a/x_n est une approximation par excès de $\sqrt{a}$ (pourquoi ?) et vice-versa. La moyenne arithmétique de ces deux approximations est $\frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$ et constitue une meilleure approximation que les deux précédentes.

On peut montrer c'est une approximation par excès (en développant $(x_n - \sqrt{a})^2$ par exemple).

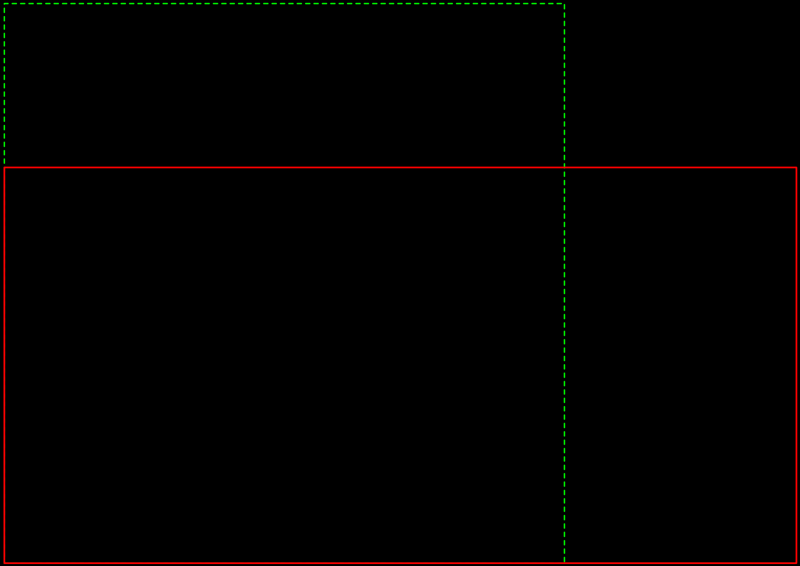
Si x_n est une approximation strictement positive par défaut de $\sqrt{a}$, alors a/x_n est une approximation par excès de $\sqrt{a}$ (pourquoi ?) et vice-versa. La moyenne arithmétique de ces deux approximations est $\frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$ et constitue une meilleure approximation que les deux précédentes.
On peut montrer c'est une approximation par excès (en développant $(x_n - \sqrt{a})^2$ par exemple).

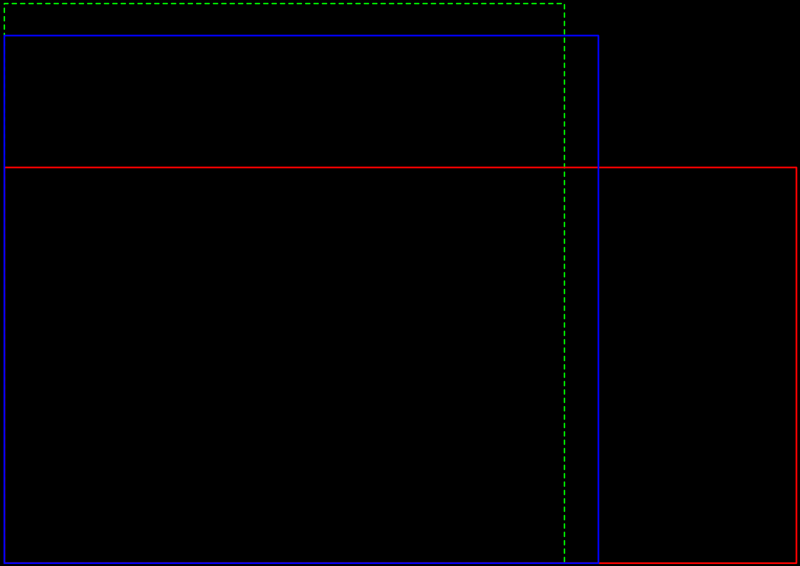
```haskell
heron a x n
  | n == 0    = x
  | otherwise = heron a ((x + a / x) / 2) (n - 1)
```

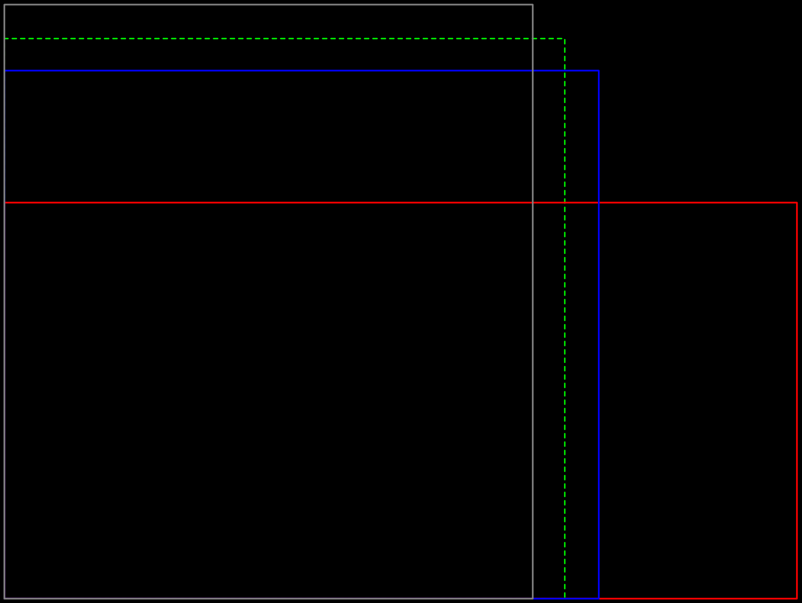
```
*Main> heron 2 1 5
1.414213562373095
*Main> sqrt 2
1.4142135623730951
```

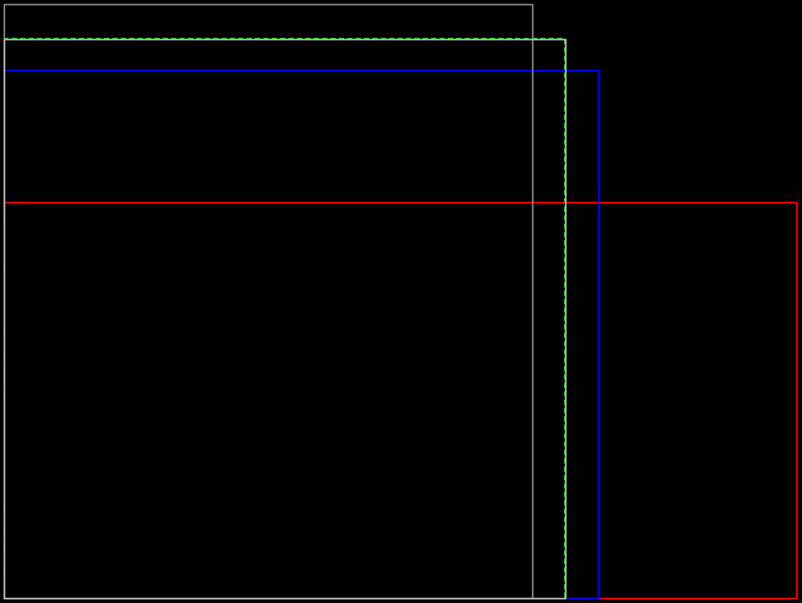
```haskell
heron a x n
  | n == 0    = x
  | otherwise = heron a ((x + a / x) / 2) (n - 1)
```

```
*Main> heron 2 1 5
1.414213562373095
*Main> sqrt 2
1.4142135623730951
```









$\log_{10}\left(\sqrt{10}\right) = \frac{1}{2}$, $\log_{10}\left(\sqrt{\sqrt{10}}\right) = \frac{1}{4}$, etc.

Nombres	10,0000	3,1623	1,7783	1,3335	1,0000
Logarithmes	1	0,5	0,25	0,125	0

$\log_{10}\left(\sqrt{10}\right) = \frac{1}{2}$, $\log_{10}\left(\sqrt{\sqrt{10}}\right) = \frac{1}{4}$, etc.

Nombres	10,0000	3,1623	1,7783	1,3335	1,0000
Logarithmes	1	0,5	0,25	0,125	0

$\log_{10}\left(\sqrt{10}\right) = \frac{1}{2}$, $\log_{10}\left(\sqrt{\sqrt{10}}\right) = \frac{1}{4}$, etc.

Nombres	10,0000	3,1623	1,7783	1,3335	1,0000
Logarithmes	1	0,5	0,25	0,125	0

$$\log_{10}\left(\sqrt{10}\right) = \frac{1}{2},\ \log_{10}\left(\sqrt{\sqrt{10}}\right) = \frac{1}{4},\ \text{etc.}$$

Nombres	10,0000	3,1623	1,7783	1,3335	1,0000
Logarithmes	1	0,5	0,25	0,125	0

$$\sqrt{10} = 10^{\frac{1}{2}} \qquad \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt{\sqrt{10}} = 10^{\frac{1}{2^2}} \qquad \sqrt{\sqrt{2}} = 2^{\frac{1}{2^2}}$$

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{10}}} = 10^{\frac{1}{2^3}} \qquad \sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}} = 2^{\frac{1}{2^3}}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\sqrt{\sqrt{\cdots\sqrt{10}}} = 10^{\frac{1}{2^{54}}} \qquad \sqrt{\sqrt{\cdots\sqrt{2}}} = 2^{\frac{1}{2^{54}}}$$

$$10^{\frac{1}{2^{54}}} \approx \underbrace{1{,}000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 127\ 819\ 149\ 320\ 032\ 35}_{1+a}$$

$$2^{\frac{1}{2^{54}}} \approx \underbrace{1{,}000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 038\ 477\ 397\ 965\ 583\ 10}_{1+b}$$

$$x = \log(2) \Leftrightarrow 10^x = 2$$

$$\log(2) = x \approx \frac{b}{a} = \frac{3\ 847\ 739\ 796\ 558\ 310}{12\ 781\ 914\ 932\ 003\ 235}$$

$$\sqrt{10} = 10^{\frac{1}{2}} \qquad \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt{\sqrt{10}} = 10^{\frac{1}{2^2}} \qquad \sqrt{\sqrt{2}} = 2^{\frac{1}{2^2}}$$

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{10}}} = 10^{\frac{1}{2^3}} \qquad \sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}} = 2^{\frac{1}{2^3}}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\sqrt{\sqrt{\cdots\sqrt{10}}} = 10^{\frac{1}{2^{54}}} \qquad \sqrt{\sqrt{\cdots\sqrt{2}}} = 2^{\frac{1}{2^{54}}}$$

$$10^{\frac{1}{2^{54}}} \approx \underbrace{1{,}000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 127\ 819\ 149\ 320\ 032\ 35}_{1+a}$$

$$2^{\frac{1}{2^{54}}} \approx \underbrace{1{,}000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 038\ 477\ 397\ 965\ 583\ 10}_{1+b}$$

$$x = \log(2) \Leftrightarrow 10^x = 2$$

$$\log(2) = x \approx \frac{b}{a} = \frac{3\ 847\ 739\ 796\ 558\ 310}{12\ 781\ 914\ 932\ 003\ 235}$$

$$\sqrt{10} = 10^{\frac{1}{2}} \qquad \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt{\sqrt{10}} = 10^{\frac{1}{2^2}} \qquad \sqrt{\sqrt{2}} = 2^{\frac{1}{2^2}}$$

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{10}}} = 10^{\frac{1}{2^3}} \qquad \sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}} = 2^{\frac{1}{2^3}}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\sqrt{\sqrt{\cdots\sqrt{10}}} = 10^{\frac{1}{2^{54}}} \qquad \sqrt{\sqrt{\cdots\sqrt{2}}} = 2^{\frac{1}{2^{54}}}$$

$$10^{\frac{1}{2^{54}}} \approx \underbrace{1{,}000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 127\ 819\ 149\ 320\ 032\ 35}_{1+a}$$

$$2^{\frac{1}{2^{54}}} \approx \underbrace{1{,}000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 038\ 477\ 397\ 965\ 583\ 10}_{1+b}$$

$$x = \log(2) \Leftrightarrow 10^x = 2$$

$$\log(2) = x \approx \frac{b}{a} = \frac{3\ 847\ 739\ 796\ 558\ 310}{12\ 781\ 914\ 932\ 003\ 235}$$

$$\sqrt{10} = 10^{\frac{1}{2}} \qquad \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt{\sqrt{10}} = 10^{\frac{1}{2^2}} \qquad \sqrt{\sqrt{2}} = 2^{\frac{1}{2^2}}$$

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{10}}} = 10^{\frac{1}{2^3}} \qquad \sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}} = 2^{\frac{1}{2^3}}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\sqrt{\sqrt{\cdots\sqrt{10}}} = 10^{\frac{1}{2^{54}}} \qquad \sqrt{\sqrt{\cdots\sqrt{2}}} = 2^{\frac{1}{2^{54}}}$$

$$10^{\frac{1}{2^{54}}} \approx \underbrace{1{,}000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 127\ 819\ 149\ 320\ 032\ 35}_{1+a}$$

$$2^{\frac{1}{2^{54}}} \approx \underbrace{1{,}000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 038\ 477\ 397\ 965\ 583\ 10}_{1+b}$$

$$x = \log(2) \Leftrightarrow 10^x = 2$$

$$\log(2) = x \approx \frac{b}{a} = \frac{3\ 847\ 739\ 796\ 558\ 310}{12\ 781\ 914\ 932\ 003\ 235}$$

$(1+a)^x \approx 1+ax$ $1+b \approx 1+ax$

$$\log(2) = x \approx \frac{b}{a} = \frac{3\ 847\ 739\ 796\ 558\ 310}{12\ 781\ 914\ 932\ 003\ 235}$$

$$\log(2) \approx 0{,}301\ 029\ 995\ 663\ 981\ 14$$

$(1+a)^x \approx 1+ax \quad 1+b \approx 1+ax$

$$\log(2) = x \approx \frac{b}{a} = \frac{3\ 847\ 739\ 796\ 558\ 310}{12\ 781\ 914\ 932\ 003\ 235}$$

$$\log(2) \approx 0{,}301\ 029\ 995\ 663\ 981\ 14$$

$$(1+a)^x \approx 1+ax \quad 1+b \approx 1+ax$$

$$\log(2) = x \approx \frac{b}{a} = \frac{3\ 847\ 739\ 796\ 558\ 310}{12\ 781\ 914\ 932\ 003\ 235}$$

$$\log(2) \approx 0{,}301\ 029\ 995\ 663\ 981\ 14$$

$(1+a)^x \approx 1+ax \quad 1+b \approx 1+ax$

$$\log(2) = x \approx \frac{b}{a} = \frac{3\ 847\ 739\ 796\ 558\ 310}{12\ 781\ 914\ 932\ 003\ 235}$$

$$\log(2) \approx 0{,}301\ 029\ 995\ 663\ 981\ 14$$

Num. absolu.	Logarithmi.	Num. absolu.	Logarithmi.	Num. absolu.	Logarithmi.
1	0,00000,00000,0000	34	1,53147,89170,4226	67	1,82607,48027,0083
	30102,99956,6398		1258,91273,0802		643,41100,0541
2	0,30102,99956,6398	35	1,54406,80443,5028	68	1,83250,89127,0624
	17609,12590,5568		1223,44564,1701		634,01780,3102
3	0,47712,12547,1966	36	1,55630,25007,6729	69	1,83884,90907,3726
	12493,87366,0830		1189,92232,9970		624,89492,7700
4	0,60205,99913,2796	37	1,56820,17240,6699	70	1,84509,80400,1426
	9691,00130,0806		1158,18725,4982		616,03087,0482
5	0,69897,00043,3602	38	1,57978,35966,1681	71	1,85125,83487,1908
	7918,12460,4762		1128,10104,0969		607,41477,1219
6	0,77815,12503,8364	39	1,59106,46070,2650	72	1,85733,24964,3127
	6694,67896,3062		1099,53843,0146		599,03636,8919
7	0,84509,80400,1426	40	1,60205,99913,2796	73	1,86332,28601,2046
	5799,19469,7768		1072,38653,9178		590,88596,1052
8	0,90308,99869,9194	41	1,61278,38567,1974	74	1,86923,17197,3098
	5115,25224,4738		1046,54336,7816		582,95436,6072
9	0,95424,25094,3932	42	1,62324,92903,9790	75	1,87506,12633,9170
	4575,74905,6068		1021,91651,8169		575,23288,8909

Avec MPFR

```
R = RealField(113)

def racine(a,x,n):
    if n == 0:
        return R(x)
    else:
        return racine(R(a), (R(x) + R(a)/R(x)) * R(0.5),
            n - 1)

def sqrn(a,n):
    if n == 0:
        return R(a)
    else:
        return sqrn(racine(R(a),1.0,10), n - 1)
```

```
a = sqrn(10,54) - R(1)
b = sqrn(2,54) - R(1)

logDeux = RealField(53)(b / a)
diffLog = logDeux - (log(2.)) / log(10.)
```

```
sage: logDeux
0.301029995663981182
sage: diffLog
5.55111512312578e-17
```

```
a = sqrn(10,54) - R(1)
b = sqrn(2,54) - R(1)

logDeux = RealField(53)(b / a)
diffLog = logDeux - (log(2.)) / log(10.)
```

```
sage: logDeux
0.301029995663981182
sage: diffLog
5.55111512312578e-17
```

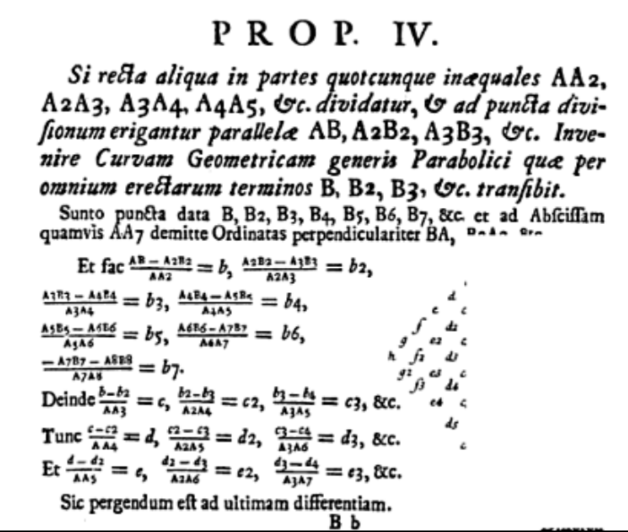
$$p \ : \ x \mapsto p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$$

$$P = [a_n, a_{n-1}, ..., a_0]$$

$$p\ :\ x \mapsto p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$$

$$P = [a_n, a_{n-1}, ..., a_0]$$

$$\begin{cases} p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \\ \texttt{map}\ p\ [1,2,3,4] = \texttt{map}\ \log\ [1,2,3,4] \end{cases}$$



PROP. IV.

Si recta aliqua in partes quotcunque inæquales $AA2$, $A2A3$, $A3A4$, $A4A5$, &c. dividatur, & ad puncta divisionum erigantur parallelæ AB, $A2B2$, $A3B3$, &c. Invenire Curvam Geometricam generis Parabolici quæ per omnium erectarum terminos B, $B2$, $B3$, &c. transibit.

Sunto puncta data B, $B2$, $B3$, $B4$, $B5$, $B6$, $B7$, &c. et ad Abscissam quamvis $AA7$ demitte Ordinatas perpendiculariter BA, $B2A2$, &c.

Et fac $\frac{AB - A2B2}{AA2} = b$, $\frac{A2B2 - A3B3}{A2A3} = b2$,

$\frac{A3B3 - A4B4}{A3A4} = b3$, $\frac{A4B4 - A5B5}{A4A5} = b4$,

$\frac{A5B5 - A6B6}{A5A6} = b5$, $\frac{A6B6 - A7B7}{A6A7} = b6$,

$\frac{A7B7 - A8B8}{A7A8} = b7$.

Deinde $\frac{b - b2}{AA3} = c$, $\frac{b2 - b3}{A2A4} = c2$, $\frac{b3 - b4}{A3A5} = c3$, &c.

Tunc $\frac{c - c2}{AA4} = d$, $\frac{c2 - c3}{A2A5} = d2$, $\frac{c3 - c4}{A3A6} = d3$, &c.

Et $\frac{d - d2}{AA5} = e$, $\frac{d2 - d3}{A2A6} = e2$, $\frac{d3 - d4}{A3A7} = e3$, &c.

Sic pergendum est ad ultimam differentiam.

B b

Problème d'interpolation dans *Methodus Differentialis* publié par Newton en 1676

$$[y_1, y_2, y_3, y_4] = \mathtt{map}\ \log\ [1, 2, 3, 4]$$

$x = 1$	$p(x) = a + b + c + d = y_1$
$x = 2$	$p(x) = a + 2b + 4c + 8d = y_2$
$x = 3$	$p(x) = a + 3b + 9c + 27d = y_3$
$x = 4$	$p(x) = a + 4b + 16c + 64d = y_4$

$$y_2 - y_1 = b + 3c + 7d = \Delta y_1$$
$$y_3 - y_2 = b + 5c + 19d = \Delta y_2$$
$$y_4 - y_3 = b + 7c + 37d = \Delta y_3$$

$$\Delta y_2 - \Delta y_1 = 2c + 12d = \Delta^2 y_1$$
$$\Delta y_3 - \Delta y_2 = 2c + 18d = \Delta^2 y_2$$

$$\Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1 = 6d = \Delta^3 y_1$$

$x=1$	$p(x)=a+b+c+d=y_1$
$x=2$	$p(x)=a+2b+4c+8d=y_2$
$x=3$	$p(x)=a+3b+9c+27d=y_3$
$x=4$	$p(x)=a+4b+16c+64d=y_4$

$$\boxed{\begin{aligned} y_2-y_1 &= b+3c+7d=\Delta y_1 \\ y_3-y_2 &= b+5c+19d=\Delta y_2 \\ y_4-y_3 &= b+7c+37d=\Delta y_3 \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta y_2-\Delta y_1 &= 2c+12d=\Delta^2 y_1 \\ \Delta y_3-\Delta y_2 &= 2c+18d=\Delta^2 y_2 \end{aligned}}$$

$$\Delta^2 y_2-\Delta^2 y_1=6d=\Delta^3 y_1$$

$$\begin{array}{|c|l|}
\hline
x=1 & p(x)=a+b+c+d=y_1 \\
x=2 & p(x)=a+2b+4c+8d=y_2 \\
x=3 & p(x)=a+3b+9c+27d=y_3 \\
x=4 & p(x)=a+4b+16c+64d=y_4 \\
\hline
\end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}
y_2-y_1=b+3c+7d=\Delta y_1 \\
y_3-y_2=b+5c+19d=\Delta y_2 \\
y_4-y_3=b+7c+37d=\Delta y_3
\end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}
\Delta y_2-\Delta y_1=2c+12d=\Delta^2 y_1 \\
\Delta y_3-\Delta y_2=2c+18d=\Delta^2 y_2
\end{array}}$$

$$\Delta^2 y_2-\Delta^2 y_1=6d=\Delta^3 y_1$$

$x=1$	$p(x)=a+b+c+d=y_1$
$x=2$	$p(x)=a+2b+4c+8d=y_2$
$x=3$	$p(x)=a+3b+9c+27d=y_3$
$x=4$	$p(x)=a+4b+16c+64d=y_4$

$$\boxed{\begin{aligned} y_2-y_1&=b+3c+7d=\Delta y_1\\ y_3-y_2&=b+5c+19d=\Delta y_2\\ y_4-y_3&=b+7c+37d=\Delta y_3\end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta y_2-\Delta y_1&=2c+12d=\Delta^2 y_1\\ \Delta y_3-\Delta y_2&=2c+18d=\Delta^2 y_2\end{aligned}}$$

$$\Delta^2 y_2-\Delta^2 y_1=6d=\Delta^3 y_1$$

$d = \frac{1}{6}\Delta^3 y_1$

$c = \frac{1}{2}\Delta^2 y_1 - \Delta^3 y_1$

$b = \Delta y_1 - \frac{3}{2}\Delta^2 y_1 + 3\Delta^3 y_1 - \frac{7}{6}\Delta^3 y_1 = \Delta y_1 - \frac{3}{2}\Delta^2 y_1 + \frac{11}{6}\Delta^3 y_1$

$a = y_1 - \Delta y_1 + \frac{3}{2}\Delta^2 y_1 - \frac{11}{6}\Delta^3 y_1 - \frac{1}{2}\Delta^2 y_1 + \Delta^3 y_1 - \frac{1}{6}\Delta^3 y_1 = y_1 - \Delta y_1 + \Delta^2 y_1 - \Delta^3 y_1$

Finalement :

$$P(x) = y_1 + (x-1)\Delta y_1 + \frac{1}{2}(x-1)(x-2)\Delta^2 y_1 + \frac{1}{6}(x-1)(x-2)(x-3)\Delta^3 y_1$$

$d = \frac{1}{6}\Delta^3 y_1$
$c = \frac{1}{2}\Delta^2 y_1 - \Delta^3 y_1$
$b = \Delta y_1 - \frac{3}{2}\Delta^2 y_1 + 3\Delta^3 y_1 - \frac{7}{6}\Delta^3 y_1 = \Delta y_1 - \frac{3}{2}\Delta^2 y_1 + \frac{11}{6}\Delta^3 y_1$
$a = y_1 - \Delta y_1 + \frac{3}{2}\Delta^2 y_1 - \frac{11}{6}\Delta^3 y_1 - \frac{1}{2}\Delta^2 y_1 + \Delta^3 y_1 - \frac{1}{6}\Delta^3 y_1 = y_1 - \Delta y_1 + \Delta^2 y_1 - \Delta^3 y_1$
Finalement :

$$P(x) = y_1 + (x-1)\Delta y_1 + \frac{1}{2}(x-1)(x-2)\Delta^2 y_1 + \frac{1}{6}(x-1)(x-2)(x-3)\Delta^3 y_1$$

$d = \frac{1}{6}\Delta^3 y_1$
$c = \frac{1}{2}\Delta^2 y_1 - \Delta^3 y_1$
$b = \Delta y_1 - \frac{3}{2}\Delta^2 y_1 + 3\Delta^3 y_1 - \frac{7}{6}\Delta^3 y_1 = \Delta y_1 - \frac{3}{2}\Delta^2 y_1 + \frac{11}{6}\Delta^3 y_1$
$a = y_1 - \Delta y_1 + \frac{3}{2}\Delta^2 y_1 - \frac{11}{6}\Delta^3 y_1 - \frac{1}{2}\Delta^2 y_1 + \Delta^3 y_1 - \frac{1}{6}\Delta^3 y_1 = y_1 - \Delta y_1 + \Delta^2 y_1 - \Delta^3 y_1$

Finalement :

$$P(x) = y_1 + (x-1)\Delta y_1 + \frac{1}{2}(x-1)(x-2)\Delta^2 y_1 + \frac{1}{6}(x-1)(x-2)(x-3)\Delta^3 y_1$$

$d = \frac{1}{6}\Delta^3 y_1$
$c = \frac{1}{2}\Delta^2 y_1 - \Delta^3 y_1$
$b = \Delta y_1 - \frac{3}{2}\Delta^2 y_1 + 3\Delta^3 y_1 - \frac{7}{6}\Delta^3 y_1 = \Delta y_1 - \frac{3}{2}\Delta^2 y_1 + \frac{11}{6}\Delta^3 y_1$
$a = y_1 - \Delta y_1 + \frac{3}{2}\Delta^2 y_1 - \frac{11}{6}\Delta^3 y_1 - \frac{1}{2}\Delta^2 y_1 + \Delta^3 y_1 - \frac{1}{6}\Delta^3 y_1 = y_1 - \Delta y_1 + \Delta^2 y_1 - \Delta^3 y_1$
Finalement :

$$P(x) = y_1 + (x-1)\Delta y_1 + \frac{1}{2}(x-1)(x-2)\Delta^2 y_1 + \frac{1}{6}(x-1)(x-2)(x-3)\Delta^3 y_1$$

$d = \frac{1}{6}\Delta^3 y_1$
$c = \frac{1}{2}\Delta^2 y_1 - \Delta^3 y_1$
$b = \Delta y_1 - \frac{3}{2}\Delta^2 y_1 + 3\Delta^3 y_1 - \frac{7}{6}\Delta^3 y_1 = \Delta y_1 - \frac{3}{2}\Delta^2 y_1 + \frac{11}{6}\Delta^3 y_1$
$a = y_1 - \Delta y_1 + \frac{3}{2}\Delta^2 y_1 - \frac{11}{6}\Delta^3 y_1 - \frac{1}{2}\Delta^2 y_1 + \Delta^3 y_1 - \frac{1}{6}\Delta^3 y_1 = y_1 - \Delta y_1 + \Delta^2 y_1 - \Delta^3 y_1$
Finalement :

$$P(x) = y_1 + (x-1)\Delta y_1 + \frac{1}{2}(x-1)(x-2)\Delta^2 y_1 + \frac{1}{6}(x-1)(x-2)(x-3)\Delta^3 y_1$$

$$\begin{array}{cccc}
\boldsymbol{y_1} & & & \\
 & \boldsymbol{\Delta y_1} & & \\
y_2 & & \boldsymbol{\Delta^2 y_1} & \\
 & \Delta y_2 & & \boldsymbol{\Delta^3 y_1} \\
y_3 & & \Delta^2 y_2 & \\
 & \Delta y_3 & & \\
y_4 & & &
\end{array}$$

avec $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$, $\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i$ et $\Delta^3 y_i = \Delta^2 y_{i+1} - \Delta^2 y_i$.

Théorème 5 (Interpolation de Newton passant par les points $(1, y_1)$, $(2, y_2)$,..., (n, y_n))

$$y_1 + (x-1)\Delta y_1 + \frac{1}{2!}(x-1)(x-2)\Delta^2 y_1 + \cdots + \frac{1}{n!}(x-1)\cdots(x-n)\Delta^n y_1$$

Théorème 5 (Interpolation de Newton passant par les points $(1, y_1)$, $(2, y_2)$,..., (n, y_n))

$$y_1 + (x-1)\Delta y_1 + \frac{1}{2!}(x-1)(x-2)\Delta^2 y_1 + \cdots + \frac{1}{n!}(x-1)\cdots(x-n)\Delta^n y_1$$

Théorème 6 (Interpolation de Newton passant par les points (α, y_1), $(\alpha+1, y_2)$,..., $(\alpha+n-1, y_n)$)

$$y_1+(x-\alpha)\Delta y_1+\frac{1}{2!}(x-\alpha)(x-\alpha-1)\Delta^2 y_1+\cdots+\frac{1}{n!}(x-\alpha)\cdots(x-\alpha-(n-1))\Delta^n y_1$$

Théorème 5 (Interpolation de Newton passant par les points $(1, y_1)$, $(2, y_2)$,..., (n, y_n))

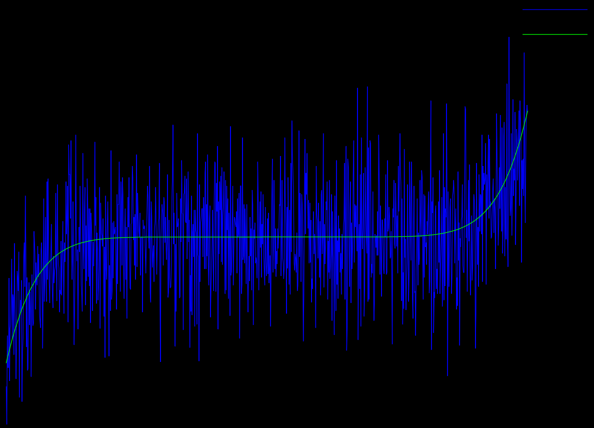
$$y_1 + (x-1)\Delta y_1 + \frac{1}{2!}(x-1)(x-2)\Delta^2 y_1 + \cdots + \frac{1}{n!}(x-1)\cdots(x-n)\Delta^n y_1$$

Théorème 6 (Interpolation de Newton passant par les points (α, y_1), $(\alpha+1, y_2)$,..., $(\alpha+n-1, y_n)$)

$$y_1+(x-\alpha)\Delta y_1+\frac{1}{2!}(x-\alpha)(x-\alpha-1)\Delta^2 y_1+\cdots+\frac{1}{n!}(x-\alpha)\cdots(x-\alpha-(n-1))\Delta^n y_1$$

Sommaire

```
comparePoly =
  plot X11  [
    Data2D [Title "Schéma Horner", Color Blue, Style Lines] [] [(x,
        exHorn x) | x <-  [1.94, 1.940125 .. 2.06]],
    Function2D [Title "Forme factorisée", Color Green] [Range 1.94
        2.06, Step 0.000125] (\x -> exFac x)
    ]
```




PS3
PlayStation Network
CALL OF DUTY
GHOSTS
16
www.pegi.info
infinity ward
ACTIVISION

Sommaire

Définition 7 (Dérivabilité)

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Soit $a \in I$. On dit que f est dérivable en a si, et seulement si, le rapport :

$$\tau_a(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

admet une limite finie lorsque a tend vers 0.
Dans ce cas on note $f'(a)$ cette limite.

Définition 8 (Dérivée $k^{ème}$)

Si f' est dérivable sur I on note f'' ou $f^{(2)}$ la dérivée de f' et on l'appelle la dérivée seconde de f. De même si f'' est dérivable sur I, f''' ou $f^{(3)}$, la dérivée de f'', est la dérivée troisième de f. Plus généralement on note $f^{(k)}$ la dérivée $k^{ième}$ de f avec la convention $f^{(0)} = f$, $f^{(k+1)} = \left(f^{(k)}\right)'$.

Définition 9 (Fonctions de classe $\mathcal{C}^n$, de classe $\mathcal{C}^\infty$)

On dit que f est de classe $\mathcal{C}^n$, $n \in \mathbb{N}$, sur I ssi f est n fois dérivable et ses n dérivées sont continues sur I. On remarquera que si $f^{(n+1)}$ existe sur I alors f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I qui s'écrit $f \in \mathcal{C}^n(I)$. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I pour exprimer que f est indéfiniment dérivable et, a fortiori, que toutes ses dérivées sont continues.

Brooks's Law [prov.]
« Adding manpower to a late software project makes it later » – a result of the fact that the expected advantage from splitting work among N programmers is $O(N)$, but the complexity and communications cost associated with coordinating and then merging their work is $O(N^2)$

in « The New Hacker's Dictionnary »
http://outpost9.com/reference/jargon/jargon_17.html#SEC24

Définition 10 (« Grand O »)

Soit f et g deux fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. On dit que f est un « grand O » de g et on note $f = O(g)$ ou $f(n) = O(g(n))$ si, et seulement si, il existe une constante strictement positive C telle que

$$|f(n)| \leqslant C|g(n)|$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Définition 11 (« Grand Oméga »)

Soit f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans lui-même. On dit que f est un « grand Oméga » de g et on note $f = \Omega(g)$ ou $f(n) = \Omega(g(n))$ si, et seulement si, il existe une constante strictement positive C telle que

$$|f(n)| \geqslant C|g(n)|$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Définition 12 (« Grand Théta »)

$$f = \Theta(g) \iff \begin{cases} f = O(g) \\ f = \Omega(g) \end{cases}$$

coût \ n	100	1 000	10^6	10^9
$\log_2(n)$	≈ 7	≈ 10	≈ 20	≈ 30
$n\log_2(n)$	≈ 665	$\approx 10\ 000$	$\approx 2\cdot 10^7$	$\approx 3\cdot 10^{10}$
n^2	10^4	10^6	10^{12}	10^{18}
n^3	10^6	10^9	10^{18}	10^{27}
2^n	$\approx 10^{30}$	$> 10^{300}$	$> 10^{10^5}$	$> 10^{10^8}$

Définition 13 (« Petit o »)

$f = o(g)$ si, et seulement si, pour toute constante positive ε, il existe un entier n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$,

$$|f(n)| \leqslant \varepsilon |g(n)|$$

Théorème 14 (Manipulation des O)

- $O(f) + O(g) = O(f+g)$;
- $f = O(f)$;
- $k \cdot O(f) = O(f)$ *si k est une constante* ;
- $O(O(f)) = O(f)$;
- $O(f) \cdot O(g) = O(f \cdot g)$;
- $O(f \cdot g) = f \cdot O(g)$.

Théorème 14 (Manipulation des O)

- $O(f) + O(g) = O(f+g)$;
- $f = O(f)$;
- $k \cdot O(f) = O(f)$ *si k est une constante* ;
- $O(O(f)) = O(f)$;
- $O(f) \cdot O(g) = O(f \cdot g)$;
- $O(f \cdot g) = f \cdot O(g)$.

Théorème 14 (Manipulation des O)

- $O(f) + O(g) = O(f+g)$;
- $f = O(f)$;
- $k \cdot O(f) = O(f)$ *si* k *est une constante* ;
- $O(O(f)) = O(f)$;
- $O(f) \cdot O(g) = O(f \cdot g)$;
- $O(f \cdot g) = f \cdot O(g)$.

Théorème 14 (Manipulation des O)

- $O(f) + O(g) = O(f+g)$;
- $f = O(f)$;
- $k \cdot O(f) = O(f)$ *si* k *est une constante* ;
- $O(O(f)) = O(f)$;
- $O(f) \cdot O(g) = O(f \cdot g)$;
- $O(f \cdot g) = f \cdot O(g)$.

Théorème 14 (Manipulation des O)

- $O(f) + O(g) = O(f+g)$;
- $f = O(f)$;
- $k \cdot O(f) = O(f)$ *si* k *est une constante* ;
- $O(O(f)) = O(f)$;
- $O(f) \cdot O(g) = O(f \cdot g)$;
- $O(f \cdot g) = f \cdot O(g)$.

Théorème 14 (Manipulation des O)

- $O(f) + O(g) = O(f+g)$;
- $f = O(f)$;
- $k \cdot O(f) = O(f)$ si k est une constante ;
- $O(O(f)) = O(f)$;
- $O(f) \cdot O(g) = O(f \cdot g)$;
- $O(f \cdot g) = f \cdot O(g)$.

Théorème 14 (Manipulation des O)

- $O(f)+O(g)=O(f+g)$;
- $f=O(f)$;
- $k\cdot O(f)=O(f)$ *si* k *est une constante* ;
- $O\left(O(f)\right)=O(f)$;
- $O(f)\cdot O(g)=O(f\cdot g)$;
- $O(f\cdot g)=f\cdot O(g)$.

Théorème 15 (Polynôme de Taylor)

Soit I un intervalle, soit f une fonction de I *vers* $\mathbb{R}$ *de classe $\mathcal{C}^n$ avec $n \in \mathbb{N}$ et soit a un élément de I. Il existe alors un unique polynôme $T_{n,a}$ de degré au plus n dont les dérivées jusqu'à l'ordre n coïncident en a avec celles de f.*
De plus :

$$T_{n,a}(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!}f^{(3)}(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a$$

$$T_{n,a}^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$$

Théorème 15 (Polynôme de Taylor)

Soit I un intervalle, soit f une fonction de I vers $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$ avec $n \in \mathbb{N}$ et soit a un élément de I. Il existe alors un unique polynôme $T_{n,a}$ de degré au plus n dont les dérivées jusqu'à l'ordre n coïncident en a avec celles de f.
De plus :

$$T_{n,a}(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!}f^{(3)}(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a$$

$$T_{n,a}^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$$

Théorème 15 (Polynôme de Taylor)

Soit I un intervalle, soit f une fonction de I vers $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$ avec $n \in \mathbb{N}$ et soit a un élément de I. Il existe alors un unique polynôme $T_{n,a}$ de degré au plus n dont les dérivées jusqu'à l'ordre n coïncident en a avec celles de f.
De plus :

$$T_{n,a}(x) = f(a)+(x-a)f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\frac{(x-a)^3}{3!}f^{(3)}(a)+\cdots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a$$

$$T_{n,a}^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$$

$$\begin{aligned} T_{n,0}(x) &= \exp(0) + (x-0)\exp'(0) + \frac{(x-0)^2}{2!}\exp''(0) \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
T_{n,0}(x) &= \exp(0) + (x-0)\exp'(0) + \frac{(x-0)^2}{2!}\exp''(0) \\
&= 1 + x + \frac{x^2}{2}
\end{aligned}
$$

$$f(x) = T_{n,a}(x) + R_{n,a}(x)$$

Théorème 16

Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a,x]$ et si $f^{(n+1)}$ existe sur $]a,x[$ alors il existe au moins un réel $c \in]a,x[$ tel que :

$$f(x) = T_{n,a}(x) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

On dit que l'on a écrit la formule de Taylor Lagrange à l'ordre n.

Théorème 17

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x)$$

Théorème 18

$$\forall x \in I, f(x) = T_{n,a}(x) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$$

Théorème 19

$$\forall x \in I, f(x) = T_{n,a}(x) + o\left((x-a)^n\right)$$

Sommaire

Définition 20

On dit que f, définie sur $\mathcal{V}_a$, admet un développement limité d'ordre $n \in \mathbb{N}$ au voisinage de a (on écrit en abrégé : « f admet un $DL_n V(a)$ ») s'il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ (ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n) et une fonction ε vérifiant :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathcal{V}_a, f(x) = P_n(x-a) + (x-a)^n \varepsilon(x) \\ \varepsilon(a) = 0 \\ \lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire $f(x) = P_n(x-a) + o\Big((x-a)^n\Big)$.

$$q > p \rightarrow (x-a)^q \underset{a}{=} o\Big((x-a)^p\Big)$$