Devoir surveillé de mathématiques n°3 - T$^{\text{ale}}$S4 - Mercredi 18 novembre 2009 - 2 heures

Exercice 1 (exercice 4 du poly corrigé en cours)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^3-4}{x^2+1}$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'unité 1cm.

1. On pose $g(x) = x^3 + 3x + 8$.
   a) Étudiez le sens de variation de g et montrez que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $\mathbb{R}$ une unique solution α dont vous donnerez un encadrement d'amplitude 10^{-2}.
   b) Précisez le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.
2. a) Étudiez les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
   b) Calculez $f'(x)$ et dressez le tableau de variation de f.
3. a) Montrez qu'il existe quatre réels a, b, c, et d tels que
   $$f(x) = ax + b + \frac{cx+d}{x^2+1}$$
   b) Déduisez en que $(\mathcal{C})$ admet une asymptote oblique Δ et étudiez la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à Δ.
   Vérifiez en particulier que $(\mathcal{C})$ rencontre Δ en un unique point Δ.
4. Déterminez les abscisses des point B et B′ de $(\mathcal{C})$ admettant une tangente parallèle à Δ.
5. Vérifiez que $f(\alpha) = 3\alpha/2$. Déduisez en une valeur approchée de $f(\alpha)$.

Exercice 2 (exercice 5 du poly)

On désigne par g la fonction définie sur $]-1\,;\,1[$ par $g(0) = 0$ et $g'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ où g' désigne la dérivée de la fonction g sur $]-1\,;\,1[$; on ne cherchera pas à expliciter $g(x)$.
On considère alors la fonction composée h définie sur $]-\pi\,;\,0[$ par
$h(x) = g(\cos x)$.

1. On rappelle que $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ pour tout réel x. Exprimez alors $1-\cos^2 x$ en fonction de $\sin^2 x$.
2. Démontrer que pour tout x de $]-\pi\,;\,0[$ on a $h'(x) = 1$, où h' désigne la dérivée de h.
3. Calculer $h\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$ puis donner l'expression de $h(x)$.

Exercice 3 (extrait de l'exercice 16 du poly dont un corrigé a été distribué)

On munit le plan d'un repère orthonormé.
Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par

$$f(x) = x - 2\sqrt{x} + 1$$

et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le repère orthonormé.

1. Étudiez les variations de f.
2. Factorisez $f(x)$.
3. Démontrez que pour tout $x \in [0,1]$ $(f \circ f)(x) = x$
4. Construisez la courbe $(\mathcal{C})$.
5. Est-ce que $(\mathcal{C})$ est un arc de cercle. Comme on dit au Bac, *dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative , même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation*.

Exercice 4

Soit f la fonction définie pour tout t de l'intervalle $[-7;5]$ par

$$f(t) = 1 - 3t^2$$

1. Déterminez les valeurs exactes sous la forme la plus simple possible des images des nombres suivants :
   $$-12\ ;\ \frac{3}{\sqrt{2}}\ ;\ \sqrt{7}\ ;\ \sqrt{(-7)^2}\ ;\ 7\times 10^{-15}$$
2. Factorisez $f(t)$.
3. Déterminez les éventuels antécédents de 7, −7, 0 et 1.
4. Résolvez sur $[-7;5]$ l'équation $f(z) = 0$.
5. Résolvez sur $[-7;5]$ l'inéquation $f(\mathrm{T}) > 1$.