TD Généralités sur les fonctions

Contre les pertes de mémoire

Exercice 1 Logarithme

Vous vous rappellez que

Propriété fondamentale du logarithme
pour tous réels a et b STRICTEMENT POSITIFS

$$\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$$

Á partir de cette relation,

1) calculez $\ln 1$,
2) calculez $\ln\left(\frac{1}{a}\right)$,
3) calculez $\ln\left(\frac{a}{b}\right)$ en fonction de $\ln a$ et $\ln b$,
4) calculez $\ln\left(a^k\right)$ pour $k \in \mathbb{Z}$
5) calculez $\ln\left(\sqrt{(}a)\right)$

Exercice 2 Exponentielle

Sachant que la fonction exponentielle vérifie

Logarithme et exponentielle

$$\forall x > 0, \quad \exp(\ln x) = x$$
$$\forall x \in \mathbb{R} \ln\left(\exp(x)\right) = x$$

1) calculez $\ln(\exp(a+b))$ et $\ln(\exp(a) \times \exp(b))$. Qu'en déduisez-vous ?
2) calculez $\exp(0)$,
3) calculez $\exp(a-b)$ et $\exp(-b)$ en fonction de $\exp(a)$ et $\exp(b)$
4) calculez $\exp(ka)$ en fonction de $\exp(a)$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Exercice 3 Équation logarithmique

Sachant que le logarithme « descend » les puissances, résolvez $x^{(x^x)} = (x^x)^x$

Limites

Exercice 4 Avec la définition

Prouvez à l'aide de la définition du cours que $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$. Déduisez-en $\lim\limits_{x\to 0} \ln x$

Exercice 5 Limite de la fonction exponentielle

En étudiant rapidement la fonction $\varphi\ :\ x \mapsto e^x - x$, prouvez que $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

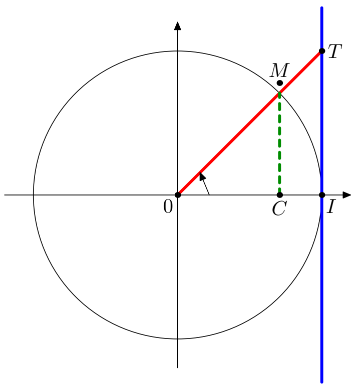
Exercice 6 Calculs de limites

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{5x+7}{x+2} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3-4x+9}{x^2+x+2} \qquad \lim_{x\to-\infty} \cos(1/x) \qquad \lim_{x\to+\infty} \ln\left(1+e^{-x}\right)$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}+2}{e^{-2x}+3} \qquad \lim_{x\to+\infty} \cos(5x)e^{-6x} \qquad \lim_{x\to 0} x^2\sin(1/x^2)$$

Exercice 7 De la géométrie pour calculer une limite

Voici une première méthode de calcul de $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$. Pourquoi suffit-il d'étudier la limite pour des valeurs de $x > 0$?



Utilisez la figure pour obtenir que, pour tout $x \in]0,\pi/2[$,

$$\sin x < x < \tan x$$

Déduisez-en un encadrement de $\dfrac{\sin x}{x}$ pour tout $x \in]0,\pi/2[$ et concluez.

Exercice 8 Limites trigonométriques

En supposant connu le résultat de l'exercice précédent, calculez $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(2x)}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x}$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$

Pour la 3ème, utilisez la formule bien connue $\cos(2a) = 1 - 2\sin^2(a)$

Exercice 9 Limite et radicaux

Calculez $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ $\qquad \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$ $\qquad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{1-\sqrt{1-x^2}}$

Exercice 10 Croissances comparées

1) Étudiez rapidement la fonction $\varphi\ :\ x \mapsto \ln x - 2\sqrt{x}$ et déduisez-en $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x}$

2) Soit $\alpha \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $x \in]0,+\infty[$. On pose $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^\alpha}$.

   a) a) En posant $X = x^\alpha$, montrez que $f(x) = \dfrac{1}{\alpha}\dfrac{\ln X}{X}$.

      a) Déduisez-en que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha} = 0$.

   b) Soit $g(x) = x^\alpha \ln x$

      b) En posant $X = 1/x$, exprimez $g(x)$ en fonction de X et α.

      b) Qu'en déduisez-vous d'intéressant ?

3) On pose maintenant $\varphi(x) = e^x/x^\alpha$.

   a) a) Montrez que $\varphi(x) = e^{x\left(1-\alpha\frac{\ln x}{x}\right)}$

      a) Déduisez-en $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x)$

   b) On pose $\psi(x) = x^\alpha e^{-x}$

      b) Démontrez que $\psi(x) = e^{-x\left(1-\alpha\frac{\ln x}{x}\right)}$

      b) Qu'en déduisez-vous d'intéressant ?

Croissances comparées

Pour tout entier naturel n non nul

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \qquad \lim_{x\to 0} x^n \ln x = 0 \qquad \lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$$

Exercice 11 Calcul de limites en l'infini

Étudier les limites quand x tend vers $+\infty$ de

$$a)\ f_1(x) = x^{1/x} \quad b)\ f_2(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \quad c)\ f_3(x) = \left(\frac{\ln x}{x}\right)^{1/x} \quad d)\ f_4(x) = \frac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x}.$$

Pour b) posez $t=1/x$; pour c), décomposez l'exposant de e à l'aide d'expressions du type $\ln t/t$

Exercice 12 Calcul de limites en 0

Étudier les limites quand x tend vers 0^+ de

$$a)\ g_1(x) = x^x \qquad b)\ g_2(x) = (x^x)^x \qquad c)\ g_3(x) = x^{(x^x)}$$

$$d)\ g_4(x) = (-\ln x)^x \qquad e)\ g_5(x) = x^2 e^{1/x}.$$

d) posez $t = -\ln x$; e) $t=1/x$

Exercice 13 Branches infinies

Étudiez les branches infinies des courbes dont on donne une équation. Donnez une équation des asymptotes lorsqu'elles existent.

1) $y = \dfrac{x^2 - x + 2}{x-2}$
2) $y = \dfrac{x^3}{x-1}$
3) $y = \sqrt{x^2+x+1}$
4) $y = x + \sqrt{x^2-1}$

5) $y = \dfrac{\sin x}{x}$
6) $y = 2x - \cos x$

Exercice 14 À la découverte du logiciel XCAS

Le logiciel XCAS va être notre compagnon tout au long de l'année. Il a l'avantage de renfermer un logiciel de calcul formel, un tableur facilement programmable, un logiciel de géometrie intéractive, et j'en passe et des meilleures, et tout ça gratuitement, c'est à dire que vous allez vous empresser de le télécharger (et oui, un ordinateur ne sert pas seulement de super play station) à l'adresse suivante

`http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/%7Eparisse/irem.html`

Nous allons tout d'abord étudier une limite très simple : $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2+1}{x^2}$

On tape

```
f:=x->(2*x^2+1)/x^2
```

On obtient ensuite des valeurs particulières

```
f(1)
```

```
f(32)
```

Pour obtenir une valeur approchée, on tape

```
evalf(f(32))
```

Pour obtenir le graphique,

```
plot(f(x))
```

Pour obtenir le graphe seul, on clique sur geo jaune. Pour obtenir simultanément l'historique et le graphe, on clique sur le menu Edit - fenêtres - 2 fenêtres.
Pour obtenir un tableau de valeurs, on clique sur `mtrw`
Pour obtenir un tableau avec un pas de 1, on tape `1` en A0 puis `=A0+1` en A1 puis on clique sur `remplir - vers le bas`.
En B0, on tape `=f(A0)` et on étire pour avoir les valeurs exactes.
En C0, on tape `=evalf(B0)` pour avoir les valeurs approchées.
On tape

```
limit(f(x),x,+infinity)
```

pour calculer la limite
Nous verrons bien d'autres applications. Nous apprendrons notamment à programmer XCAS pour ne pas s'en servir seulement comme une super calculatrice.

Exercice 15 « Développements limités »

1) En utilisant les résultats des exercices 6 et 7, montrez que, au voisinage de 0, on a les résulats suivant avec $\lim_{x \to 0} e(x) = 0$

   ▷ $\sin x = x + x \cdot e(x)$
   ▷ $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + x^2 \cdot e(x)$
   ▷ $\tan x = x + x \cdot e(x)$
   ▷ $\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{x}{2}$

2) Sur XCAS ou votre calculatrice, tapez

   ```
   plot([x,sin(x)],color=[red,green])
   ```

   Regardez ce qui se passe pour $x \in [-1/2, 1/2]$ puis sur $[-10, 10]$. Faites de même pour les autres fonctions. Qu'en pensez-vous ?

3) Toujours plus fort : calculez $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-(1+x/2)}{x^2}$. Déduisez-en que

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + x^2 \cdot e(x)$$

Observez alors le graphique

```
plot([sqrt(1+x),1+0.5*x,1+0.5*x-0.125*x^2],color=[red,blue,green])
```

Commentaires ?

4) Avec deux chapitres d'avance, parlons tangente : donnez une équation de la tangente à la courbe d'équation $y = \sqrt{1+x}$ au point d'abscisse 0. Des remarques ?
Quelle est la position de la courbe par rapport à la tangente ? Des remarques ?

Exercice 16 Équivalents

1) Démontrez à l'aide de la définition que $f \underset{a}{\sim} f$
2) Démontrez que si $f \underset{a}{\sim} g$ et $g \underset{a}{\sim} h$, alors $f \underset{a}{\sim} h$
3) Démontrez que si $f \underset{a}{\sim} g$ et $h \underset{a}{\sim} k$, alors $fh \underset{a}{\sim} gk$
4) Démontrez alors que si $f \underset{a}{\sim} g$, alors $f^n \underset{a}{\sim} g^n$ avec $n \in \mathbb{N}$.
5) Démontrez que $\sin x \underset{0}{\sim} x$
6) Démontrez que $1 - \cos u \underset{0}{\sim} \dfrac{u^2}{2}$
7) Calculez $\lim_{x\to 0} \dfrac{x\bigl(1-\cos(\sqrt{3x}\bigr)}{\sin^2 x}$ en deux lignes.

Exercice 17 Croyable mais faux

1) Est-il vrai qu'une fonction strictement croissante tend forcément vers $+\infty$?

On pourrait le penser en effet : une fonction qui ne fait que croître va forcément monter vers $+\infty$. Et pourtant c'est FAUX !
Je vous laisse trouver un *contre-exemple.*

2) Est-il vrai qu'une fonction qui tend vers $+\infty$ est forcément croissante pour x assez grand ?

On pourrait le penser en effet : puisqu'il faut aller vers l'infini et au-delà, il va bien falloir monter sans s'arrêter. Et pourtant c'est FAUX !
Je vous laisse trouver un *contre-exemple.*

3) Est-il vrai qu'une fonction bornée tend forcément vers un réel en $+\infty$?

On pourrait le penser en effet : puisque la fonction est bornée, elle ne pourra aller vers l'infini, donc il faut qu'elle se stabilise quelque part. Et pourtant c'est FAUX !
Je vous laisse trouver un *contre-exemple.*

4) Est-il vrai qu'une fonction tendant vers M en $+\infty$ est majorée par M

J'avoue que c'est difficile à croire, mais il y a toujours des étudiants pour tomber dans le panneau.
Je vous laisse trouver un *contre-exemple.*

Continuité

Exercice 18 Des fonctions discontinues pour physiciens

1) On note $\mathcal{U}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\mathcal{U}(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ 1 \text{ si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Représentez graphiquement la fonction $\mathcal{U}$ puis la fonction Λ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\Lambda(x) = x\mathcal{U}(x) - 2(x-1)\mathcal{U}(x-1) + (x-2)\mathcal{U}(x-2)$$

2) Soient A et T deux réels non nuls. Soit f_A la fonction paire et T-périodique définie par

$$f_A(x) = A - \frac{2A}{T}x$$

pour tout $x \in [0,T/2]$.
Représentez graphiquement f_A.
Donnez une formule explicite de $f_A(x)$ pour tout $x \in [-T/2,0]$.

Exercice 19 Preuve par le dessin

Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ et à valeurs dans $[0,1]$.
Montrez à l'aide d'un dessin qu'il existe un réel $x_0 \in [0,1]$ vérifiant $f(x_0) = x_0$.

Exercice 20 L'analyse au secours de l'algèbre

Montrez que tout polynôme de degré impair possède au moins une racine réelle.

Exercice 21 A mad tea party : un peu de logique

« Reprenez donc un peu de thé » propose le Lièvre de Mars.
« Je n'ai rien pris du tout, je ne saurai donc reprendre de rien ! »
« Vous voulez dire que vous ne sauriez reprendre de quelque chose » repartit le Chapelier.
« Quand il n'y a rien, ce n'est pas facile d'en reprendre ».

– Alors comme ça, vous êtes étudiante?
– Oui, en mathématiques par exemple.
– alors que vaut cette fraction : un sur deux sur trois sur quatre?
– Eh bien ...
– Elle vaut deux tiers, la devança le Loir.

– Ou trois huitièmes si vous préférez, ajouta le Lièvre de Mars.
– Ou encore un sur vingt-quatre, affirma le Chapelier.
– En fait, je crois que...
– Aucune importance ! Dîtes-nous plutôt combien vous voulez de sucre dans votre thé ?
– Deux ou trois, ça dépend de la taille de la tasse.
– Certainement pas, car de toute façon, deux ou trois c'est pareil.
– Parfaitement ! approuva le Loir en fixant Alice qui écarquillait les yeux.
– Ce n'est pourtant pas ce qu'on m'a appris, fit celle-ci.
– Pourtant, ce n'est pas compliqué à comprendre, en voici une démonstration des plus élémentaires
  On sait que pour tout entier n on a successivement

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$$

$$(n+1)^2 - 2n - 1 = n^2$$

Retranchons $n(2n+1)$ des deux côtés

$$(n+1)^2 - (n+1)(2n+1) = n^2 - n(2n+1)$$

Mézalor, en ajoutant $(2n+1)^2/4$, on obtient

$$(n+1)^2 - (n+1)(2n+1) + \frac{(2n+1)^2}{4} = n^2 - n(2n+1) + \frac{(2n+1)^2}{4}$$

Soit

$$\left((n+1) - \frac{2n+1}{2}\right)^2 = \left(n - \frac{2n+1}{2}\right)^2$$

En passant à la racine carrée, on obtient

$$(n+1) - \frac{2n+1}{2} = n - \frac{2n+1}{2}$$

d'où

$$n+1 = n$$

Et si je prends $n = 2$, j'ai aussitôt $3 = 2$
– Alors, qu'est-ce que vous en dites ?
– Je...commença Alice.
– D'ailleurs, cela prouve que tous les entiers sont égaux, la coupa le Lièvre de Mars.
– Pas mal du tout ! Qu'en dites-vous mademoiselle la mathématicienne ?
– Je vais vous dire tout de suite ce que j'en pense
– Ah non ! Nous préfèrerions de loin que vous pensiez ce que vous allez nous dire.
– C'est pareil ! grinça Alice qui commençait à en avoir assez.
– Comment ça, c'est pareil ? Dire ce que l'on pense ce serait pareil que penser ce que l'on dit ? S'étrangla le Lièvre de Mars.
– Incroyable ! Et manger ce qu'on voit ce serait pareil que voir ce qu'on mange ?
– Mais...
– Et respirer quand on dort pareil que dormir quand on respire ?
– En logique, nous vous mettons 3 sur 5.
– Autant dire moins que un.
– C'est à dire zéro, puisque si 2=3 alors 1=0.
– Parce que chez vous, 3 c'est moins que 1 ? s'indigna Alice.

– On se demande ce qu'on vous apprend à l'école ! Bien sûr que oui ! Tenez, considérez

$$f(x) = \frac{x^2+32}{2x^2+1} + \frac{|x|+1}{2x+51}$$

Eh bien il est facile de voir que cette fonction a pour limite 0 en moins l'infini et 1 en plus l'infini.

– Je ne dis pas le contraire, protesta Alice.

– Donc l'image par f de $\mathbb{R}$ est l'intervalle $]0,1[$, or $f(0) = 3$, donc 3 appartient à $]0,1[$ à ce titre : on a bien 3 plus petit que 1.

– C'est de la folie pure, pensa Alice...

Dérivation

Exercice 22 Calculs de dérivées

$$a(x) = \left(\cos(x)^6\right) \quad b(x) = \frac{1}{\ln x} \quad c(x) = \sqrt{1+e^{-2x}} \quad d(x) = e^{sinx} \quad \left(x^2+x+3\right)^{3/2} \quad e(x) = \ln(\ln x)$$

$$f(x) = \ln(\ln(\ln(lnx))) \quad g(x) = \frac{2\sqrt{x}}{1+x} \quad h(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad i(x) = \frac{j\omega x}{(j\omega x)^2+3j\omega x+1}$$

Exercice 23 Une dérivée pour calculer une limite

Calculez

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}$$

Exercice 24 Problème d'optimisation

Les molécules d'un gaz enfermé dans un récipient à la température T sont animées d'une vitesse de v cm.s^{-1}. Cet état d'équilibre est caractérisé par la fonction de distribution de vitesse de Maxwell-Boltzmann

$$F(v) = cv^2\, e^{-mv^2/(2kT)}$$

où T est la température (en K), m la masse d'une molécule et c et k des constantes positives.
Montrez que la valeur maximale de F a lieu en $v = \sqrt{2kT/m}$.

Exercice 25 Taux de croissance d'une éléphante

La fonction de croissance de von Bertanlanffy donne approximativement la masse $W(t)$ (en kg) à l'âge t (en années) des éléphants africains femelles. Son expression est

$$W(t) = 2600\left(1-0{,}51e^{-0{,}075\,t}\right)^3$$

1) Évaluez la masse et le taux de croissance d'un nouveau-né (le taux de croissance à l'instant t est évidemment $W'(t)$).
2) Calculez et interprétez $\lim\limits_{t\to+\infty} W(t)$.
3) Montrez que le taux de croissance le plus fort se situe entre 5 et 6 ans.

Exercice 26 Une trigonométrie exponentielle

On appelle cosinus hyperbolique la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\mathrm{ch} \ : \ x \mapsto \mathrm{ch}(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

sinus hyperbolique la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\text{sh} \ : \ x \mapsto \text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

et tangente hyperbolique la fonction définie par

$$\text{th} \ : \ x \mapsto \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)}$$

1) Déterminez les dérivées de ces fonctions en fonction de ch et sh.
2) Étudiez ces fonctions pour montrer que ch est à valeurs dans $[1,+\infty]$ et que th est définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $[-1,1]$.
3) Calculez $\text{th}\,(x)$ en fonction de e^x et e^{-x}, puis en fonction de e^{2x}, enfin en fonction de e^{-2x}.
4) Montrez que $\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1$.
5) Montrez que $\text{ch}(x+y) = \text{ch}(x)\,\text{ch}(y) + \text{sh}(x)\,\text{sh}(y)$ et que $\text{sh}(x+y) = \text{sh}(x)\,\text{ch}(y) + \text{ch}(x)\,\text{sh}(y)$.
6) Déduisez-en que $\text{th}\,(x+y) = \dfrac{\text{th}\,(x) + \text{th}\,(y)}{1 + \text{th}\,(x)\text{th}\,(y)}$
7) On pose $t = \text{th}\,(x/2)$. Montrez que $\text{ch}(x) = \dfrac{1+t^2}{1-t^2}$ puis que $\text{sh}(x) = \dfrac{2t}{1-t^2}$
8) Résolvez dans $\mathbb{R}$ l'équation $5\,\text{ch}(x) - 4\,\text{sh}(x) = 3$. Vous donnerez une valeur approchée de la solution à 10^{-3} près.
9) Pour le plaisir : dérivez la fonction $x \mapsto \dfrac{2\sin(x)\,\text{sh}(x)}{(\text{sh}(x)+\sin(x))^2}$
10) Soit $y \in \mathbb{R}$. Comparez $\text{sh}(y)$ et y.
11) Montrez que $\text{sh}(2x) = 2\,\text{sh}(x)\,\text{ch}(x)$ puis étudiez la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\text{th}\,(x)}{x}$$

.

Exercice 27 Calcul d'erreur

Dans un essai de flexion 3 points, le module d'Young est donné par

$$E = \frac{FL^3}{4fbh^3}$$

avec F la force exercée sur l'éprouvette, L la longueur entre appuis de l'éprouvette, f la flèche, b la largeur de l'éprouvette et h la hauteur de l'éprouvette.

Donnez l'expression de l'erreur relative absolue $\left|\dfrac{dE}{E}\right|_{max}$ en fonction des erreurs dF, dL, df, db et dh sur les différentes grandeurs.

Exercice 28 Dérivabilité

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x) = \exp\left(\dfrac{x-1}{x^2}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ f(x) = a \quad \text{si } x = 0 \end{cases}$

1) Rappelez la définition d'une fonction continue en zéro.
2) Existe-t-il une valeur de a telle que f soit continue en zéro ?
3) Sachant que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$, montrez que $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$.
4) Rappelez la définition d'une fonction dérivable en zéro.
5) La fonction f est-elle dérivable en zéro ?
6) Calculez $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$. La fonction f' est-elle continue en zéro ?

Exercice 29 Construction approchée du graphe d'une solution par la méthode d'Euler - Illustration à l'aide de XCAS

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f(0) = 1$ et, pour tout x, $f'(x) = f(x)$.

1) Soit h un réel voisin de zéro. Montrez que, pour tout réel a, l'approximation affine donnée par le calcul des dérivées s'écrit
$$f(a+h) \simeq (1+h) \times f(a)$$
2) On prend $h = 0{,}001$. On note (a_n) la suite définie par $a_0 = 0$ et $a_{n+1} = a_n + h$. Donnez une approximation de $f(a_{n+1})$ en fonction de $f(a_n)$.
Déduisez-en que la suite des approximations de $f(a_n)$ est une suite géométrique que vous caractériserez.
3) Faîtes de même avec $h = -0{,}001$.
4) Imaginez alors, à l'aide d'un tableur, une construction point par point de la représentation graphique d'une approximation de f sur l'intervalle $[-2{,}2]$.
5) Montrez que $f(1) \simeq \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ et calculez la valeur approchée correspondante de $f(1)$ pour $n = 10\,000$.

Voici un petit programme qui construit la courbe approchée par la méthode d'Euler. Il est écrit en langage MuPAD : il faudra donc configurer XCAS en cliquant sur l'icône rouge `cas` puis `progstyle - mupad`.

```
>> Euler:=proc(n,xmin, xmax)  n c'est 1/h

>> local x,y,k,P,S: variables internes au programme

>> begin

>> S:=NULL; on construit une suite de point vide au départ

>> y:=1; y=f(0) vaut 1

>> for k from xmin*n to xmax*n do

>>  x:=k/n+1/n; y:=(1+1/n)**k;  coordonnées d'un point

>>  P(k):=[x,y]: on définit le point P(k)

>>  S:=S.P(k):C'est la suite S des points des points P(k)

>> end_for: fin de la boucle

>>  plot([S]);  on trace la suite des points.

>> end_proc:fin du programme

>> Euler(100,-2,2);  On demande le tracé pour h=1/100, x varie de -2 à 2
```

Exercice 30 Théorème de Rolle

Ce théorème affirme que

Théorème de Rolle
Si f est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et si $f(a) = f(b)$ alors il existe un réel $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$

Nous nous proposons de démontrer ce théorème.

1) Faites un dessin résumant .... et démontrant la situation.
2) Comme f est continue sur $[a,b]$, l'image de $[a,b]$ est un intervalle d'après le TVI. Notons-le $[m,M]$.
   a) Si $m = M$, que peut-on en déduire?
   b) Sinon, le maximum M par exemple est atteint pour un réel $e \in]a,b[$. Notons $\tau_e(x) = \dfrac{f(e+x) - f(e)}{x}$.
   Que pensez-vous de $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \tau_e(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \tau_e(x)$?
   c) Étudiez le signe de $f'(e)$ et concluez.

Exercice 31 Théorème des acroissements finis

Voici l'énoncé

th éorème des accroissements finis
Si f est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ alors il existe au moins un réel $c \in]a,b[$ tel que $f(b)-f(a) = (b-a)f'(c)$

Pour prouver ce théorème, faites une figure. On appellera A le point d'abscisse a, B le point d'abscisse b, M le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse x et P le point du segment [AB] d'abscisse x. On note enfin $\varphi(x) = \overline{PM} = y_M - y_P$

1) Exprimez $\varphi(x)$ en fonction de x.
2) Pourquoi peut-on appliquer le théorème de Rolle à φ sur $[a,b]$? Appliquez le et concluez.

Exercice 32 Application du TAF

1) Soit f une fonction dérivable sur $[a,b]$ telle que $f'(x) = 0$ pour tout $x \in [a,b]$. Démontrez que f est constante sur $[a,b]$.
2) Soit deux fonctions dérivables sur $[a,b]$ tells que $f'(x) = g'(x)$ pour tout $x \in [a,b]$. Démontrez qu'il existe un réel constant C tel que $f(x) = g(x) + C$ pour tout $x \in [a,b]$.