

TD 5 & 6 : NOMBRES COMPLEXES

Exercice 1 Forme exponentielle

Donnez la forme exponentielle de j , $2j$, $1 - j$, 32 , $j(1 - j)$, $j/(1 - j)$, $1 - j\sqrt{3}$, $-e^{j\pi/4}$.

Exercice 2 Forme trigonométrique

Écrivez sous forme trigonométrique $a = e^{2jx} + e^{-2jx}$, $b = -4i(e^{5jt} - e^{-5jt})$, $c = 6e^{4j\pi/9}$, $d = 1 - e^{j\alpha}$.

Exercice 3 Lignes trigonométriques de $\pi/12$

Écrivez sous forme trigonométrique $z = \frac{\sqrt{6} - j\sqrt{2}}{2(1 - j)}$ puis sous forme algébrique et déduisez-en $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

Exercice 4 Une méthode de calcul de $\sin(2t)$, $\cos(2t)$ et $\tan(2t)$ en fonction de $\tan t$

- 1) Exprimez $z = \frac{1 + j \tan t}{1 - j \tan t}$ sous forme exponentielle puis sous forme algébrique.
- 2) Calculez alors $\sin(2t)$, $\cos(2t)$ et $\tan(2t)$ en fonction de $\tan t$. Ces résultats seront très utiles pour calculer des intégrales.
- 3) Calculez une valeur exacte de $\tan(\pi/8)$

Exercice 5 Exponentielle d'un complexe

Au moment de résoudre des équations différentielles du deuxième ordre, nous aurons besoin de définir l'exponentielle d'un complexe quelconque. Si $x + iy$ est la forme algébrique du complexe z , alors

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy}$$

- 1) Montrez que pour tout z et z' dans \mathbb{C} , $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$
- 2) Montrez que $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$
- 3) Montrez que $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^z = 0$
- 4) Démontrez que pour tout complexe z $|e^z| \leq e^{|z|}$
- 5) Résolvez dans \mathbb{C} les équations $(E_1) : e^z = -1$, $(E_2) : e^z = -32$, $(E_3) : e^z = 32j$

Exercice 6 Racines 5^{èmes} d'un nombre complexe

Résolvez dans \mathbb{C} les équations $z^5 = -1$, $z^5 = j$, $z^5 = 1 + j$

Exercice 7 Équations du second degré

Résolvez dans \mathbb{C} les équations suivantes :

$$\begin{aligned} a) z^2 + 1 = 0 \quad b) z^2 + z + 1 = 0 \quad c) z^2 - j\sqrt{2}z - j\frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \quad d) z^2 + 5(1 - j)z - 4(3 + 4j) = 0 \\ e) z^4 + (1 - 2j)z^2 - 2j = 0 \quad f) (z - 1)^6 + (z - 1)^3 + 1 = 0 \end{aligned}$$

Exercice 8 Une nouvelle formule trigo

- 1) vérifiez que $x = \frac{x+y}{2} + x - y2$. Exprimez y de la même manière.
- 2) Déduisez-en que $e^{jx} + e^{jy} = 2 \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) e^{j(x+y)/2}$. Exprimez de même $e^{jx} - e^{jy}$.
- 3) Déduisez-en les factorisations de $\cos x + \cos y$ et $\sin x + \sin y$ qui se trouvent dans le formulaire de trigo.

Exercice 9 Formules d'Euler et de Moivre

Linéarisez $\cos^4 t$, $\cos^3 t + \sin^4 t$. Exprimez $\sin(3x)$ et $\cos(5x)$ en fonction de $\sin x$ et $\cos x$