THÈME 1

TERRE DES NOMBRES

After more than a decade of intense research,
Derek unveils his calculation for the value of pi.

I - Explorons l'horizon

Exploration 1 : souvenir de vacances
Je suis au bord d'une falaise de la côte bretonne et je contemple l'horizon, là-bas, au loin. La Terre semble être un disque plat dont je suis le centre. Au fait, *à quelle distance se trouve l'horizon ?*

Un petit dessin s'impose...et d'autres problèmes apparaissent...

Comme nous, Ératosthène, directeur de la bibliothèque d'Alexandrie vers -240, se doutant que la Terre était une sphère, voulut calculer son rayon.

Il observa l'ombre de deux objets situés en deux lieux, Syène (aujourd'hui Assouan) et Alexandrie, le 21 juin (solstice d'été) au midi solaire local. C'est à ce moment précis de l'année que dans l'hémisphère nord le Soleil détient la plus haute position au-dessus de l'horizon. Or, Ératosthène remarqua qu'il n'y avait aucune ombre dans un puits à Syène (ville située à peu près sur le tropique du Cancer) ; ainsi, à ce moment précis, le Soleil était vertical et sa lumière éclairait directement le fond du puits. Ératosthène remarqua cependant que le même jour à la même heure, un obélisque situé à Alexandrie formait une ombre ; le Soleil n'était donc plus à la verticale et l'obélisque avait une ombre décentrée. Il mesura que l'ombre était 7,2 fois plus petite que l'obélisque.

Ératosthène évalua ensuite la distance entre Syène et Alexandrie : la distance obtenue était de 5000 stades, mesure très proche de la réalité, un stade (longueur utilisée dans les stades d'Olympie ou de Delphes) valant environ 157,5 m.

Exploration 2 : rayon de la Terre
En utilisant les mesures d'Ératosthène, peut-on calculer le rayon de la Terre ?

Un nouveau dessin s'impose...et d'autres problèmes apparaissent...

Exploration 3 : une approximation géométrique de π
Il n'est pas trop compliqué de déterminer le périmètre d'un hexagone. « Coinçons » alors un cercle de rayon $\frac{1}{2}$ entre deux hexagones bien choisis : ça nous permettra d'avoir une première approximation du périmètre du cercle.

Des dessins s'imposent...

Et si on coinçait notre cercle entre deux dodécagones ? Puis entre deux tétraicosagones ?

Et si on allait jusqu'à 96 côtés comme Archimède ? Et si on allait plus loin grâce à un ordinateur ?

Ou bien, on peut utiliser un autre résultat qui semble étonnant :

Exploration 4 : une approximation étrange de π

En 1735, Leonard EULER découvre au cours de ses nombreuses recherche le résultat suivant :

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots$$

Le problème, c'est ces $\cdots$

Notons $S(1) = \frac{1}{1^2}$, $S(2) = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}$, $S(3) = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}$ et plus généralement :

$$S(n) = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$$

Calculons $S(1)$, $S(2)$, $S(3)$, $S(4)$. Des remarques ? Comment faire appel à un ordinateur pour nous aider à aller plus loin ?

II - Expéditions scientifiques

a. Voyage à Babylone

Numération babylonienne

Tout à côté de l'Égypte, au cours du deuxième millénaire avant Astérix et Obélix, à Babylone, apparut un autre système de numération. La forme, d'abord, était différente car les Babyloniens utilisaient des tablettes et des poinçons au lieu de papyrus et de pinceaux. Il y avait principalement deux caractères : 𒐕 et 𒌋.
Pour compter jusqu'à 59, le système fonctionne comme en Égypte et plus tard en Grèce et à Rome : on ajoute la valeurs des signes écrits. Ainsi 𒌋𒐖 correspond à 12, 𒐏 𒐜 à 48.
Lisez les nombres suivants : 𒌍 𒐜 ; 𒐐 𒐗 ; 𒎙 𒐝.
Proposez d'autres exemples à vos voisins.

À partir de 60, la numération ressemble plus à la nôtre car elle devient « positionnelle » : en effet, la valeur d'un signe dépend de sa position par rapport aux autres.
Ainsi, 63 s'écrit 𒐕 𒐗, c'est-à-dire 1 fois 60 plus 3 fois 1.
De même, 𒐗 𒎙 𒐗 correspond à $3 \times 60 + 23 = 203$
Enfin 𒐖 𒌋 𒐝 𒌍 𒐙 correspond à 2 soixantaines de soixantaines + 19 soixantaines +35, c'est-à-dire ?

Proposez d'autres nombres à vos voisins.
.

Que pensez-vous de cette opération : 𒌋 𒐙 + 𒐐 𒐙 = 𒐕 ?

Et de celle-ci : 𒐖 × 𒐕 𒌍 = 𒐗 ?
Est-ce que ça ne vous rappelle pas quelque chose ?

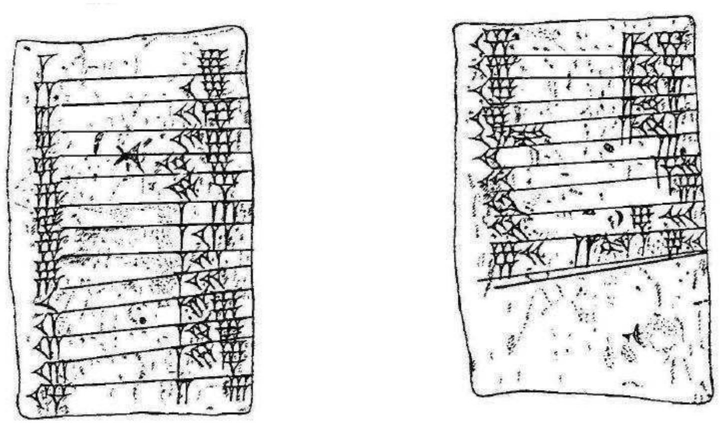
Les Babyloniens étaient confrontés à une petite ambiguité : le nombre 𒐗 𒎙 𒐗 qu'on peut noter [3;23] représentait à la fois

- $3 \times 60 + 23$;
- $3 \times 60^2 + 23 \times 60$;
- $3 + 23 \times \frac{1}{60}$;
- etc.

En fait, cela fait penser aux « multiplications à virgules » de l'école primaire où vous « décaliez » la virgule quitte à rajouter des zéros : pourquoi ?

Multiplication babylonienne

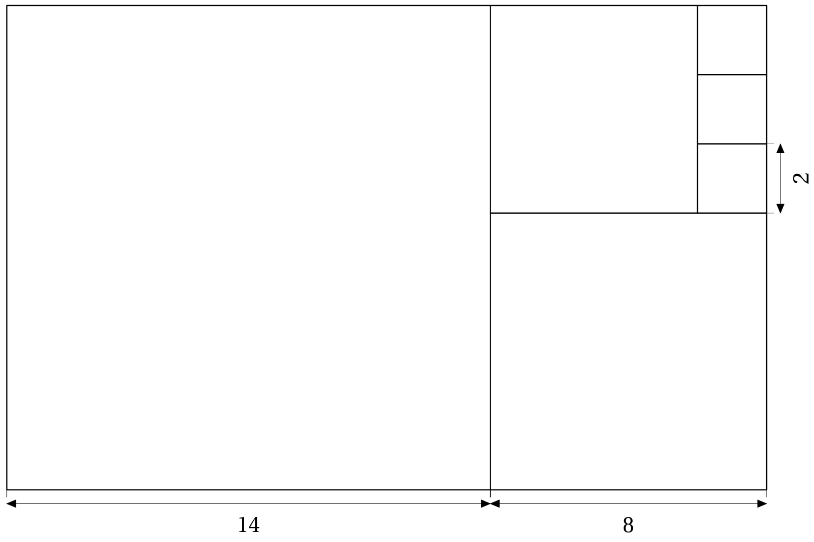
Les petits Babyloniens devaient apprendre beaucoup de tables de multiplications qui ressemblaient à ce « cahier » d'écolier : de quelle table s'agit-il ?



Ils disposaient également d'une table des carrés ; complétez la table suivante :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
n^2	1	4	9																	

Pour multiplier 14 par 22, ils avaient ce petit dessin en tête :



et il ne restait plus qu'à additionner : $14 \times 22 = 14^2 + 8^2 + 6^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2$
Multipliez de la même manière 17 par 31.

b. Voyage en Angleterre

L'unité de base anglaise pour mesurer les masses est la livre « *pound* » dont l'abbréviation est en toute logique anglaise **lb**...
Une livre correspond *environ* à 453,49g. Pour des mesures plus fines, on utilise l'once « *ounce* » (**oz**) qui vaut $\frac{1}{16}$lb et le dram (**dr**) qui vaut $\frac{1}{16}$oz.
Pour des mesures plus importantes, on utilise les pierres « *stone* » (**st**) sachant que 1st= 14lb.
Combien pesez-vous ? Quelle est votre masse en pierre et livre ?

Vous pesez votre panier rempli de pommes et la balance indique $2\frac{3}{8}$ lb : qu'est-ce que ça signifie ? Quelle est la masse correspondant en grammes ?

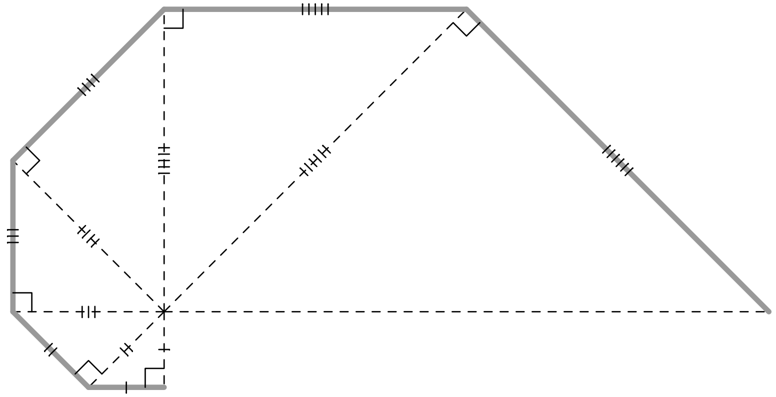
Et si vous trouvez $3\frac{5}{16}$ oz de diamant dans votre jardin ?

c. Vers nos racines

Il aurait été plus correct d'intituler cette activité : **construisons des irrationnels à la règle et à l'équerre**.

Quelle est la longueur de la diagonale d'un carré de côté 1 ? Déduisez-en une *construction* de $\sqrt{2}$.
Construisez de même $\sqrt{5}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{11}$.

Casse-tête en forme d'escargot adepte du cubisme : quelle est la longueur du dixième segment gris de cette spirale[1] ?



d. Vers l'infini et au-delà...

Curiosité

Observez ce qu'affiche une calculatrice quand vous effectuez les calculs suivants :

$$\frac{324-32}{9} \qquad \frac{3245-32}{99} \qquad \frac{324510-32}{9999}$$

Sans preuve, essayez d'écrire 57,33333333333333333333...sous forme de fraction.

Une histoire de ...

Par convention, les ...veulent dire qu'il y a une infinité de 3 à droite de la virgule. C'est un peu vague, nous en reparlerons plus bas.
À votre avis, que vaut 1,333...−1,333 ? 1,333− 1,333 ? 1,333 ··· − 1,33 ?
Tout ça reste un peu empirique.

1. Je ne vous demande pas de prouver le résultat mais juste de le deviner

L'algèbre au secours de la numération

Nous aimerions prouver ce que nous avons observé tout à l'heure. Essayons donc d'écrire 32,444...sous forme de fraction, puisque la machine nous dit que *ça a l'air* possible.
Comme c'est embêtant d'écrire 32,444..., nous allons lui donner un petit surnom, par exemple *Joe*.
Donc $Joe = 32,444\ldots$.
LA ruse : que vaut $10 \times Joe - Joe$? Déduisez-en que *Joe* est un nombre rationnel puis retrouvez les résultats précédents.

Développement décimal périodique

Posez la division de 1 par 3, vous obtenez sans cesse le reste 1 et le développement décimal est donc 0,33333333333...
En fait, il existe une écriture qui évite les ... : $0,\underline{3}$ signifie de la même manière que le 3 se répète infiniment.
Voyez ce que donne 13/7.

$$
\begin{array}{l|l}
13 & 7 \\ \cline{2-2}
\ \ 60 & 1.8\,5\,7\,1\,4\,2\,8\,5\,7 \\
\ \ \ \ 40 & \\
\ \ \ \ \ \ 50 & \\
\ \ \ \ \ \ \ \ 10 & \\
\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 30 & \\
\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 20 & \\
\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 60 & \\
\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 40 & \\
\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 50 & \\
\ 1 &
\end{array}
$$

Donc on écrit $13 \div 7 = 1.\underline{857142}\ldots$

Si, et seulement si

Si je nage en maillot de bain dans un lac syldave **alors** je serai mouillé, mais est-ce que **si** je suis mouillé **alors** je nage en maillot de bain dans un lac syldave ?
La première proposition [2] est une **implication** vraie : nager en maillot de bain dans un lac syldave implique d'être mouillé.
On utilise le symbole $\Longrightarrow$ pour matérialiser cette implication :

Nager en maillot dans un lac syldave $\Rightarrow$ être mouillé

La deuxième proposition [3] est l'**implication réciproque**. Dans le cas qui nous occupe, cette implication réciproque est fausse

être mouillé $\nRightarrow$ nager en maillot dans un lac syldave

On dit que ces deux propositions ne sont pas **équivalentes** :

Nager en maillot dans un lac syldave $\nLeftrightarrow$ être mouillé

Que pensez-vous de l'affirmation : *Un quadrilatère est un carré si, et seulement si, c'est un rectangle* ?

Et celle-ci : *Un quadrilatère est un parallélogramme si, et seulement si, il a deux côtés opposés et de même longueur*

Revenons à nos nombres.
En pensant à la division posée, expliquer pourquoi un nombre rationnel admet forcément un développement décimal périodique.
Inversement, expliquez pourquoi un nombre admettant un développement rationnel périodique est forcément rationnel.
Comment exprimer ces résultats en termes d'équivalence ?

Les limites du développement décimal

Écrivez sous forme de fraction le nombre $1,\underline{9}$.
Des remarques ?

III - Des algorithmes...

a. Valeur absolue

La valeur absolue d'un nombre est égale à sa distance à zéro...

2. **Si** je nage en maillot de bain dans un lac syldave **alors** je serai mouillé
3. **Si** je suis mouillé **alors** je nage en maillot de bain dans un lac syldave

b. Jardinage et grattage

Avec le réchauffement de la planète, Rezé est devenu une oasis au milieu d'un désert de sable. Seule végétation à avoir résisté, un alignement de 50 palmiers espacés de 1 mètre sont l'objet de toutes les attentions du dernier jardinier encore en exercice. Il dispose d'un arrosoir dont la capacité correspond aux besoin d'un palmier et d'un point d'eau situé au pied du premier palmier. Combien de mètres parcourt-il pour arroser tous les palmiers ?

Autre problème : vous avez gagné au grand tirage au sort des abonnés à *Voilà*. La direction du magazine vous offre de vous verser sur votre compte en banque 1 euro après un mois d'abonnement, 2 euros après 2 mois, 3 euros après 3 mois, etc. Si vous ne dépensez rien, de combien disposerez-vous après 50 mois d'abonnement ?

c. Héron d'Alexandrie

Contemporain de l'empereur Auguste, Héron d'Alexandrie est célèbre pour avoir déterminé un moyen d'obtenir une approximation de $\sqrt{2}$ mais les Babyloniens connaissait cette technique bien avant lui.

Le secret de la méthode part de la constatation suivante : si x est un nombre plus grand que $\sqrt{2}$ alors $\frac{2}{x}$ est plus petit que $\sqrt{2}$. Pouvez-vous le prouver ?

Si on part de $x = 2$, qu'est-ce que cela prouve ? Mmmmmmmm... pas terrible.

Prenons le milieu entre x et $\frac{2}{x}$: est-il plus grand ou plus petit que $\sqrt{2}$? Comment en être toujours sûr ?

d. François Viète

En 1593, entre deux poules au pot dégustées en l'honneur du bon roi Henri IV, François Viète prouva la formule suivante :

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \times \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \times \cdots$$

Utilisez cette formule pour obtenir une bonne approximation de π.

IV - Exercices techniques

Exercice 1

Répondre par vrai ou faux en justifiant vos réponses :

1. Un entier est positif.
2. Un entier n'est pas un décimal.
3. Un décimal est un rationnel.
4. Un quotient de deux nombres est un rationnel.
5. Un nombre peut être à la fois un entier naturel et un entier relatif.
6. 3 est un nombre rationnel.

Exercice 2

On considère tous les nombres compris entre -4 et 3 inclus.

1. Combien cet intervalle contient-il d'éléments de $\mathbb{N}$?
2. Combien cet intervalle contient-il d'éléments de $\mathbb{Z}$?
3. Combien cet intervalle contient-il d'éléments de $\mathbb{Q}$?
4. Citer un élément de cet intervalle qui soit entier non naturel.
5. Citer un élément de cet intervalle qui soit un rationnel non décimal.
6. Citer un élément de cet intervalle qui soit un réel mais pas un rationnel.

Exercice 3

On donne un rectangle STUV dont les dimensions exactes en centimètres sont :

$$\mathrm{ST} = \mathrm{L} = 16 + 4\sqrt{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{TU} = l = 16 - 4\sqrt{2}.$$

Calculer, en détaillant et en donnant les valeurs exactes des résultats :

1. Le périmètre $\mathscr{P}$ du rectangle STUV en centimètres.

2. L'aire $\mathscr{A}$ du rectangle STUV en centimètres carrés.
3. La longueur d de la diagonale du rectangle STUV en centimètres.

Exercice 4

Compléter toutes les cases du tableau suivant par le symbole $\in$ ou $\notin$

	$\frac{35}{7}$	$\frac{27}{100}$	$\frac{\sqrt{5}+3\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$	$1+2\sqrt{3}$	$-\frac{1+2}{3}$	$\frac{12}{7+5}$	$\sqrt{5^2-4^2}$	$(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})$	$\frac{3+2\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}}$	$\frac{341}{19}$
$\mathbb{N}$										
$\mathbb{Z}$										
$\mathbb{D}$										
$\mathbb{Q}$										
$\mathbb{R}$										

Exercice 5

1. Montrer que $\sqrt{1+\frac{3}{5}} \times \sqrt{1-\frac{3}{5}}$ est rationnel.
2. Montrer que $\left(3\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\left(3\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$ et $\left(\sqrt{2}+\sqrt{8}\right)^2$ sont des entiers.
3. Montrer que $\left(\sqrt{\frac{2}{5}}-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^2$ est un rationnel.
4. Plus généralement,montrer que les nombres $\left(\sqrt{\frac{a}{c}}-\sqrt{\frac{c}{a}}\right)^2$ et $\left(\sqrt{\frac{a}{c}}+\sqrt{\frac{c}{a}}\right)^2$ le sont aussi.

Exercice 6

Un fil de section S comporte n électrons par unité de volume se déplaçant à la vitesse v. L'intensité I du courant circulant dans ce fil est donnée en ampère par la formule :

$$\mathrm{I} = n\mathrm{S}qv$$

où q désigne une charge électrique.

On donne :

$n = 6 \times 10^{26}\ m^{-3}$
$q = 1{,}5 \times 10^{-19}$ C

$v = 2 \times 10^{-3}\ m.s^{-1}$
$\mathrm{S} = 1{,}2 \times 10^{-6}\ m^2$.

1. Faire le calcul de I, en ampère, à l'aide de la calculatrice, et donner le résultat.
2. Faire le calcul à la main en détaillant les étapes.

Exercice 7

Écrire le nombre suivant sans radical au dénominateur : $\mathrm{A} = \dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$.

Exercice 8

Écrire sous forme de fraction irréductible : $\mathrm{B} = \dfrac{1+\dfrac{1}{2}}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{3}}}$.

Exercice 9

Soit ABC un triangle tel que $\mathrm{AB} = \sqrt{8}+\sqrt{2}$, $\mathrm{AC} = \sqrt{3}+2\sqrt{27}$ et $\mathrm{BC} = \frac{184\,148}{63\,217}$.

1. Donner à l'aide de la calculatrice un encadrement à 10^{-2} près de chacun des côtés.
2. Donner les valeurs exactes de AB^2, AC^2 et BC^2.
3. Le triangle ABC est-il rectangle ?

Exercice 10

1. Décomposer le nombre 1 008 en produit de facteurs premiers.
2. Écrire le nombre $\sqrt{1\,008}$ sous la forme $a\sqrt{7}$ où a est un nombre entier.

Exercice 11

Soit x un nombre réel. On pose

$$A = \sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1} \qquad \text{et} \qquad B = \frac{2x}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}}$$

1. Avec une calculatrice, déterminer des valeurs approchées à 10^{-10} près de A et B pour :
$$x = 10^4 \qquad x = 10^{18} \qquad x = -3$$
2. Démontrer par le calcul que $A = B$.
3. Comment peut-on expliquer les résultats de la question **1.** ?

Exercice 12

Pour trouver la nature d'un nombre, on le simplifie au maximum pour trouver le plus petit ensemble auquel il appartient.
Déterminer la nature des nombres suivants :

$$A = \frac{-\sqrt{144}}{3}; \qquad B = \frac{\pi}{314}; \qquad C = \frac{\left(\sqrt{3}-2\right)\left(\sqrt{3}+2\right)}{45}; \qquad D = \left(5\sqrt{3}+2\right)^2 - 20\sqrt{3}$$

$$E = \frac{\pi}{3} \div \frac{\pi}{11}; \qquad F = 5{,}393\overline{939}\ldots; \qquad G = 5{,}37 - 11{,}6$$

Exercice 13

1. Donner l'écriture scientifique des nombres suivants :
   (a) $H = 4{,}5 \times 10^5 \times 6{,}4 \times 10^4$;
   (b) $I = -2{,}45 \times 10^{-4} + 54{,}7 \times 10^{-4}$;
   (c) $J = \frac{4{,}8\times 10^{-11}\times 27\times 10^5}{1{,}2\times 10^{-3}}$
2. La vitesse de la lumière est d'environ 3×10^8 m/s. La distance moyenne entre la Terre et le Soleil est d'environ $149 \times 10^6 km$. Calculer le temps mis par un rayon lumineux du Soleil pour atteindre la Terre.

Exercice 14

1. Développer et réduire l'expression $(n+1)^2 - n^2$.
2. En déduire que tout nombre entier impair est la différence de deux carrés.
3. Trouver une différence de deux carrés égale à 13, puis une autre égale à 45.

Exercice 15

Montrer les égalités suivantes :

1. $\frac{1\,000+0{,}000\,03^2-10^3}{6\times 10^{-9}} = 0{,}15$
2. $16 - \left(\sqrt{3}-5\right)^2 = \left(9-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}-1\right)$
3. $\frac{5-\sqrt{2}}{23} = \frac{1}{5+\sqrt{2}}$
4. $\frac{\sqrt{5}+1}{5+\sqrt{5}} + 7\sqrt{5} = \frac{36\sqrt{5}}{5}$

Exercice 16

Développer et réduire :
$A = (4-\sqrt{5})^2 \qquad B = (\sqrt{5}+\sqrt{3})^2 \quad C = (7-\sqrt{5})(7+\sqrt{5}) \qquad D = (4\sqrt{3}-2)(3+\sqrt{3})$

Exercice 17

Factoriser les expressions suivantes :

$A(x) = 64x^2 - 49$
$B(x) = 21x^2 - 14x$
$C(x) = 4x^2 - 4x + 1$
$D(x) = (4x-3)^2 - 25$

$E(x) = 4(x-1)^2 - 2(x-1)(x+3)$
$F(x) = 4(x-2)^2 - 16$
$G(x) = (5x+3)^2 - (6x-2)^2$

Exercice 18

Déterminer les constantes a, b et c tels que : $\dfrac{6x^2 - x + 4}{2x-3} = ax + b + \dfrac{c}{2x-3}$.

Exercice 19

Exprimer chacun des nombres a, b, c et d sous forme d'une fraction irréductible en faisant apparaître les étapes du calcul :

$a = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \div \frac{5}{2}$

$b = \frac{13 \times 10^{14} \times 10^{6}}{2 \times (10^3)^7}$

$c = \sqrt{\dfrac{49}{100} + \dfrac{(\sqrt{3})^2}{10}}$

$d = \frac{1}{20}\left(\sqrt{14} - 1\right)\left(\sqrt{14} + 1\right)$

Exercice 20

Parmi les expressions suivantes, indiquer les sommes, les produits et les quotients.

$A(x) = \dfrac{2x-3}{x^2+1}$ $\quad B(x) = \dfrac{x+1}{x} + \dfrac{1}{4}$ $\quad C(x) = \dfrac{4x}{3}(x-2)$

$D(x) = (5x-1)^2$ $\quad E(x) = (x-3)2x + 7$ $\quad F(x) = 3x(x+1)$

NB : on fera des phrases du type : « $G(x)$ est le produit de $(x+7)$ par $(x-3)$. »

Exercice 21

Retrouver parmi les expressions suivantes celles qui correspondent à des développements de carrés :

$A(x) = x^2 + 2x + 1$ $\quad B(x) = 4x^2 - 4x + 1$

$C(x) = x^2 + 3x + 9$ $\quad D(x) = 4x^2 + 12x + 9$

Exercice 22

Soit l'expression $f(x) = -x^2 + \dfrac{6}{x}$.

Calculer l'expression pour les valeurs suivantes :

- $x = 3$;
- $x = -2$;
- $x = \sqrt{3}$;
- $x = \dfrac{3}{2}$. .

Exercice 23

Vérifier que les trois expressions suivantes correspondent à une même expression :

$$x(2x-1) - 3\ ; \qquad (2x-3)(x+1)\ ; \qquad 2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{25}{8}$$

Exercice 24

1. Vérifier les égalités suivantes : $\sqrt{\left(2-\sqrt{5}\right)^2} = \sqrt{5} - 2$ et $\sqrt{11 - 6\sqrt{6}} = 3 - \sqrt{2}$.
2. Calculer : $A = 3\sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^2} + 2\sqrt{\left(2\sqrt{2}-3\right)^2} - \sqrt{11 - 6\sqrt{6}} = 3 - \sqrt{2}$.