TP No 7

Transformée de LAPLACE

Pierre-Simon de Laplace (1749-1827) a été très éclectique dans ses explorations scientifiques (qui furent majeures) et politiques (qui furent souvent médiocres). Fils d'un ouvrier agricole, il fut ministre de l'intérieur sous le Consulat, comte de l'Empire, marquis après la Restauration. Son œuvre mathématique est très riche mais c'est paradoxalement une découverte d'Euler dévéloppée un siècle plus tard par Heaviside qui a été nommée en son honneur et que nous allons étudier aujourd'hui

1 Apéritif : convergence uniforme d'une suite de fonctions

On considère une suite de fonctions (f_n) définie sur un intervalle I.
Calculez $\lim_{n\to+\infty} f_n(x)$, le maximum de $f_n(x)$ sur I. Dites si la convergence est uniforme et vérifiez si l'égalité suivante a lieu :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$$

Ah, j'oubliai : tout ceci avec Maple, évidemment...
Vous commencerez par `f:=(n,x)->...)`. Vous utiliserez `limit`, `int`, `solve`.
Vous finirez par une animation des représentations graphiques des f_n pour différentes valeurs de n avec `plots[display]([P],insequence=true)`.
Testez avec $f_n(x) = \frac{nx}{(1+n^2x^2)^2}$ et $g_n(x) = \frac{n^2x}{(1+n^2x^2)^2}$ sur $[0,1]$ par exemple.

2 Gâteau sec : une drôle de fonction intégrable au sens de Riemann

Bernhard RIEMANN (1826-1866)

Cet exemple, cité dans l'excellent « *L'analyse au fil de l'histoire* » de HAIRER et WANNER, a été proposé par RIEMANN en 1854 pour démontrer la portée de sa théorie de l'intégration. Soit

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\mathrm{B}(nx)}{n^2} \quad \text{où} \quad \mathrm{B}(x)\begin{cases} x-\langle x\rangle & \text{si } 2x \notin \mathbb{Z} \\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

avec $\langle x\rangle$ l'entier le plus proche de x (`round` sous Maple).
Que pensez-vous de la continuité de cette fonction sur $[0,1]$? La série converge-t-elle uniformément ? La fonction f est-elle intégrable sur $[0,1]$?
Créez une procédure `B:=x->...` qui calcule $\mathrm{B}(x)$.
Vous utiliserez `type` et une conditionnelle `if...then...else...`.
Créez ensuite une procédure `fn:=(n,x)->...` qui calcule $\frac{\mathrm{B}(nx)}{n^2}$.
Tracez la représentation graphique de plusieurs f_n.
Créez `F:=(n,x)->sum(fn(k,x),k=1..n)` et tracez la représentation graphique de `F(100,x)` par exemple.

3 Plat de résistance : transformée de Laplace

3 1 Rôle

La transformée de LAPLACE permet de convertir une équation différentielle dont on connaît les conditions initiales en une équation algébrique : on résout l'équation algébrique puis on effectue la transformation inverse pour obtenir la solution de l'équation différentielle.

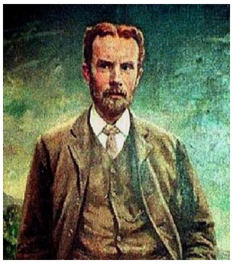
3 2 Définitions et premières propriétés

Si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ en étant identiquement nulle sur $]-\infty;0[$, on appelle transformée de Laplace de f la fonction F définie, sous certaines conditions, par :

$$\mathcal{L}\big(f(x)\big) = \mathrm{F}(s) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-sx} f(x)\,\mathrm{d}x$$

La fonction $\mathcal{L}$ qui à f associe sa transformée F est la **transformation de LAPLACE**.
Pour assurer l'existence de la transformée, voici deux conditions suffisantes :
– f est continue par morceaux sur tout compact $[0, \mathrm{A}]$;
– f est d'ordre exponentiel à l'infini : il existe $\mathrm{M} > 0$ et $a \in \mathbb{R}$ tels que $\big|f(x)\big| < \mathrm{M}\mathrm{e}^{ax}$ pour tout x assez grand.
Si ces conditions sont vérifiées, pour quelles valeurs de s la transformée est-elle définie ?
On obtient facilement les transformées de Laplace des fonctions polynomiales, trigonométriques, exponentielles, etc. qu'on regroupe dans une table.
Créez une fonction `lap := (f,s) ->....`
Déterminez les transformées de LAPLACE des fonctions définies par les expressions suivantes et vérifiez avec Maple en utilisant `assume` à bon escient :
$f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x$, $f_3(x) = x^n$, $f_4(x) = \sqrt{x}$, $f_5(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $f_6(x) = \mathrm{e}^{-ax}$, $f_7(x) = \cos(\omega x)$, $f_8(x) = \sin(\omega x)$, $f_9(x) = \mathrm{sh}(ax)$, $f_{10}(x) = \mathrm{ch}(ax)$.
Vous donnerez vos résultats sous forme d'un tableau.

On a l'habitude de nommer la fonction $\mathcal{U} : x \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x \geqslant 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ **échelon de HEAVISIDE** du nom du scientifique anglais qui créa le calcul opérationnel que nous allons bientôt introduire.



Oliver HEAVISIDE (1850-1925)

La transformation de LAPLACE est clairement linéaire.
Exprimez $\mathcal{L}(f(ax))$ et $\mathcal{L}(f(x-a))$ en fonction de $\mathcal{L}(f(x))$.
Que peut-on dire de la transformée d'une fonction périodique ?
On suppose que f' vérifie les mêmes conditions que f. Démontrez que

$$\mathcal{L}(f'(x)) = s\mathrm{F}(s) - f(0^+)$$

puis que

$$\mathcal{L}(f''(x)) = s^2\mathrm{F}(s) - sf(0^+) - f'(0^+)$$

si f'' est suffisamment régulière.
En fait, aux valeurs initiales près (!), la transformée de LAPLACE remplace le produit formel de $f(x)$ par $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ par le produit algébrique de $\mathrm{F}(s)$ par s.
Que vaut $\lim\limits_{s\to+\infty} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-sx} f'(x)\,\mathrm{d}x$?
Déduisez-en $\lim\limits_{s\to+\infty} s\mathrm{F}(s)$ (C'est le théorème de la valeur initiale).
Montrez de même que

$$\mathcal{L}\left(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right) = \frac{\mathrm{F}(s)}{s}$$

3 3 Transformation inverse

Mathias LERCH (1860-1922)

On sent, d'après les résultats précédents, quelles pourraient être les applications de cette transformation.

Pour cela, il faudrait pouvoir passer de la transformée à **l'original**. Si $\mathrm{F}(s) = \mathcal{L}\big(f(x)\big)$ alors f est une transformée inverse de F : $f(x) = \mathcal{L}^{-1}(\mathrm{F}(s))$.

On parle alors d'**original** de $\mathrm{F}(s)$.

On fera attention au fait que deux fonctions distinctes peuvent avoir la même transformée. Toutefois, un théorème dû à LERCH (1903) permet d'avoir une idée du problème :

Si la fonction résultat $\mathrm{F}(s)$ *est identiquement nulle, ou même si l'on sait seulement que* $\mathrm{F}(s_0 + mh) = 0$ *(*$m = 1, 2, 3, \dots$*) où* s_0 *est un point quelconque du demi-plan de convergence et* h *un nombre réel quelconque, la fonction* $f(x)$ *est nulle presque partout.*

La démonstration est fondée sur le théorème d'approximation de WEIERSTRASS.

On retiendra donc que l'original est unique sur tout sous-ensemble où il est continu.

La transformation inverse est linéaire comme réciproque d'une application linéaire.

Nous abuserons donc des décompositions en éléments simples.

Déterminez les originaux de $\mathrm{F}(as)$ et $\mathrm{F}(s+a)$, de $\mathrm{F}'(s)$ et de $\displaystyle\int_s^{+\infty} \mathrm{F}(u)\,\mathrm{d}u$.

Montrez que $\mathcal{L}^{-1}(\mathrm{F}(s)\times\mathrm{G}(s)) = \displaystyle\int_0^x f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t$ (produit de convolution de f par g).

3 4 Application à la résolution d'équations différentielles linéaires

On veut résoudre l'équation différentielle $y'' - 3y' - 4y = \sin(x)$ en utilisant les transformées de Laplace avec les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = -1$.

Alors :

$$\mathcal{L}\big(y'' - 3y' - 4y\big) = \mathcal{L}(\sin(x))$$

c'est-à-dire :

$$\big(s^2 - 3s - 4\big)\mathcal{L}(y) - sy(0) - y'(0) + 3y(0) = \mathcal{L}(\sin(x))$$

Déterminez $\mathcal{L}(y)$. Vérifiez avec Maple.

Utilisez `convert(L(y),parfrac,s)` pour vérifier votre décomposition en éléments simples.

Vous pourrez vérifier votre résultat avec `inttrans[invlaplace](%,s,x)`.

Appliquez cette méthode pour résoudre le système différentiel :

$$\begin{cases} y_1' = 4y_1 + 4y_2 \\ y_2' = y_1 + 4y_2 \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} y_1(0) = 0 \\ y_2(0) = 1 \end{cases}$$

4 Fromage : exercices divers

7 - 1

Soit la fonction $\mathrm{J}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{(n!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$.

Vérifiez que sa transformée est $\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$.

Résolvez l'équation différentielle $xy'' + y' + xy = 0$ telle qe $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$ en utilisant les transformées de LAPLACE.

7 - 2

Développez $\frac{\sin x}{x}$ en série entière. En déduire sa transformée de LAPLACE.

Retrouvez ce résultat à l'aide de l'original de $\int_s^{+\infty} \mathrm{F}(u)\,\mathrm{d}u$.

Résolvez ensuite $xy'' + 2y' + xy = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

5 Dessert : directement avec Maple (pour vérifier..)

`dsolve({equa,cond},fonc(var),method=laplace)` permet de résoudre directement l'équation différentielle.

Pour utiliser des outils plus détaillés, on ouvre la bibliothèque `inttrans`.

```
> with(inttrans);
> equadiff := diff(x(t),t$2)-4*diff(x(t),t)+3*x(t)=exp(3*t);
> L:=laplace(equadiff,t,s);
> L:=subs({x(0)=4,D(x)(0)=8},L);
> L:=subs(laplace(x(t),t,s)=K(s),L);
> K(s):=solve(L,K(s));
> sol := invlaplace(K(s),s,t);
```

6 Digestif : une démonstration du théorème de Lerch dans un cas particulier

Soit f continue et bornée sur $[0, +\infty[$.

On note $\mathrm{F}(s) = \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t$ et $\mathrm{G}(s) = \int_0^{+\infty} tf(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrez que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty$.
2. Soit $h : t \mapsto \mathrm{e}^t\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^t}$.

   (a) Montrez que $h(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!}\mathrm{e}^{(k+1)t}$.

   (b) Montrez que h est intégrable sur $\mathbb{R}$ et que $\int_{\mathbb{R}} h = 1$.

(c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $h_n : t \mapsto n h_n(t)$. Montrez que

$$\forall a > 0, \quad \lim_{n \to +\infty} \int_{-a}^{a} h_n(t)\,\mathrm{d}t = 1$$

(d) En déduire que pour f continue et bornée sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $x > 0$:

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} h_n(x-t) f(t)\,\mathrm{d}t = f(x)$$

3. Soit F la transformée de LAPLACE de f continue et bornée sur $\mathbb{R}_+$.
Montrez que pour tout $x > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$n \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \mathrm{e}^{n(k+1)x} \mathrm{F}(n(k+1)) = \int_0^{+\infty} h_n(x-t) f(t)\,\mathrm{d}t$$

4. Que pouvez-vous en déduire s'il existe $\mathrm{A} > 0$ tel que F soit identiquement nulle sur $[\mathrm{A}, +\infty[$?