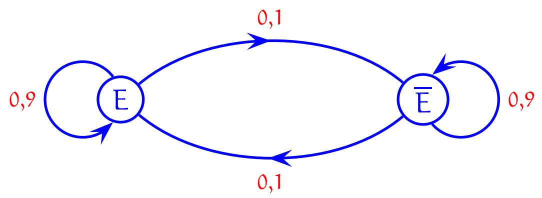
Terminale ES_1 (enseignement de spécialité)
Corrigé du devoir en classe n° 4

Partie A : propagation symétrique (de type « neutre »)

1. *Graphe probabiliste*
   La situation correspond au graphe probabiliste suivant :



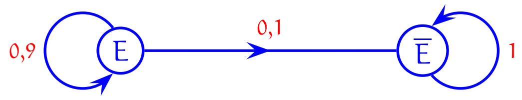
2. *Matrice de transition* M

$$M = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix}.$$

3. *État stable*
   Comme aucun coefficient de M n'est nul, l'état probabiliste P_n tend vers un état stable unique P, indépendant de l'état initial P_0.
   L'état stable $P = \begin{pmatrix} p & q \end{pmatrix}$ est défini par $P = P \times M$ et $p + q = 1$.
   $P = P \times M$ s'écrit $\begin{pmatrix} p & q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}9p + 0{,}1q & 0{,}1p + 0{,}9q \end{pmatrix}$.
   On obtient le système $\begin{cases} p = 0{,}9p + 0{,}1q \\ l = 0{,}1p + 0{,}9q \\ p + q = 1 \end{cases}$ équivalent à $\begin{cases} 0{,}1p = 0{,}1q \\ 0{,}1q = 0{,}1p \\ p + q = 1 \end{cases}$.
   Ce système est donc équivalent à $\begin{cases} p = q \\ p + q = 1 \end{cases}$ ainsi on obtient $p = 0{,}5$ et $q = 0{,}5$.
   L'état stable est $P = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$.
   Cela signifie que, sur le long terme, on aura autant de chance de recevoir l'information E que l'information $\overline{E}$.

Partie B : propagation asymétrique (de type « rumeur »)

1. *Graphe probabiliste*
   La nouvelle situation correspond au graphe probabiliste suivant :



2. *Matrice de transition* N

$$N = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. *Nature de la suite* (p_n)
   Pour tout entier naturel n, on a :

$$\begin{pmatrix} p_{n+1} & q_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_n & q_n \end{pmatrix} \times N = \begin{pmatrix} p_n & q_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}9p_n & 0{,}1p_n + q_n \end{pmatrix}.$$

Ainsi, pour tout entier naturel n, $p_{n+1} = 0{,}9p_n$.

La suite (p_n) est une suite géométrique de raison $0{,}9$. Son premier terme est $p_0 = 1$.

4. *Expression de* p_n *en fonction de* n

   Pour tout entier naturel n, $p_n = (0{,}9)^n$.

5. *Limite de* p_n *lorsque* n *tend vers* $+\infty$

   Comme $0 < 0{,}9 < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \lim\limits_{n\to+\infty} (0{,}9)^n = 0$.

   Cela signifie que, sur le long terme, seule la fausse rumeur $\overline{E}$ sera transmise.