Terminales S (enseignement de spécialité)
Devoir en classe n° 1
Mardi 15 octobre 2013

EXERCICE 1

Les questions sont indépendantes.

1. Déterminer la matrice carrée $M = (m_{i,j})$ d'ordre 4 telle que $m_{i,j} = 2i+j-1$ si $i \neq j$ et $m_{i,i} = 2i-1$.
2. A et B sont deux matrices carrées d'ordre n telles que $AB = BA$. Démontrer que :
   a. $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$;
   b. $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$.
3. On pose $N = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 3 & 4 & -3 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   a. Calculer N^2.
   b. Calculer $N^2 - 5N$.
   c. En déduire que N est inversible et donner l'expression de N^{-1} en fonction de N et I.
   Écrire N^{-1} de manière explicite.

EXERCICE 2

On pose $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On rappelle que $C^0 = I$.

1. En détaillant les calculs, donner les valeurs de C^2 et C^3.
2. Déterminer la matrice D telle que $C = 2I + D$.
3. Calculer CD, DC et D^2.
4. a. Vérifier que pour $k \in \{0\ ;\ 1\ ;\ 2\}$ on a $C^k = 2^k I + k \times 2^{k-1} D$.
   b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel k, $C^k = 2^k I + k \times 2^{k-1} D$.
   c. Donner une expression explicite de C^k, pour tout entier naturel k.

EXERCICE « OULIPISTE »

Déterminer le produit :

$$\begin{pmatrix} \text{le} & \text{a} & \text{le} \\ \text{un} & \text{a} & \text{un} \\ \text{le} & \text{avait} & \text{un} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \text{chat} & \text{rat} & \text{lion} \\ \text{mangé} & \text{dévoré} & \text{dégusté} \\ \text{poisson} & \text{fromage} & \text{touriste} \end{pmatrix}.$$

(D'après Raymond QUENEAU dans « Bâtons, chiffres et lettres », 1950.)