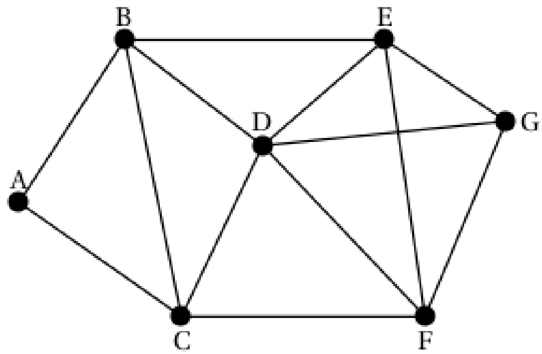
Exercice 1

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment

On considère le graphe Γ ci-dessous :

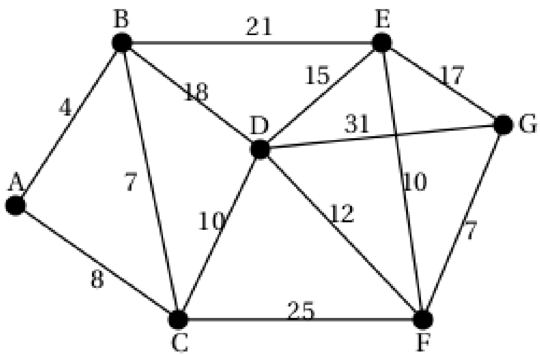


PARTIE A

1) Ce graphe admet-il une chaîne eulérienne ? Justifier la réponse. Si oui donner une telle chaîne.
2) Ce graphe admet-il un cycle eulérien ? Justifier la réponse. Si oui donner un tel cycle.
3) Donner la matrice M associée au graphe Γ. Les sommets seront pris dans l'ordre alphabétique : A, B, C, D, E, F, G.

PARTIE B

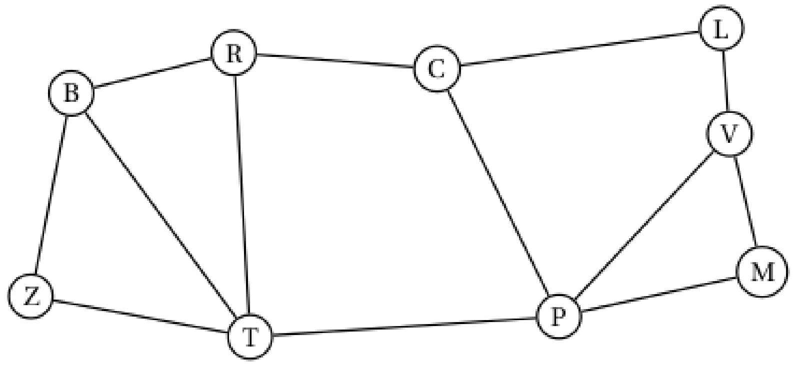
Une région est munie d'un réseau de trains, représenté par le graphe Γ ci-dessous.
Les stations sont symbolisées par les sommets A, B, C, D, E, F et G. Chaque arête représente une ligne reliant deux gares. Les temps de parcours (correspondance comprise) en minutes entre chaque sommet ont été rajoutés sur le graphe.



1) Déterminer le plus court chemin en minutes, reliant la gare B à la gare G.
   Justifier la réponse grâce à un algorithme.
2) Quelle est la longueur en minutes de ce chemin ?

Exercice 2

Le graphe ci-dessous représente les autoroutes entre les principales villes du Sud de la France :
Bordeaux (B), Clermont-Ferrand (C), Lyon (L), Marseille (M), Montpellier (P), Brive (R), Toulouse (T), Valence (V) et Biarritz (Z).



Pour cette question, on justifiera chaque réponse.

1) **a)** Déterminer l'ordre du graphe.
b) Déterminer si le graphe est connexe.
c) Déterminer si le graphe est complet.

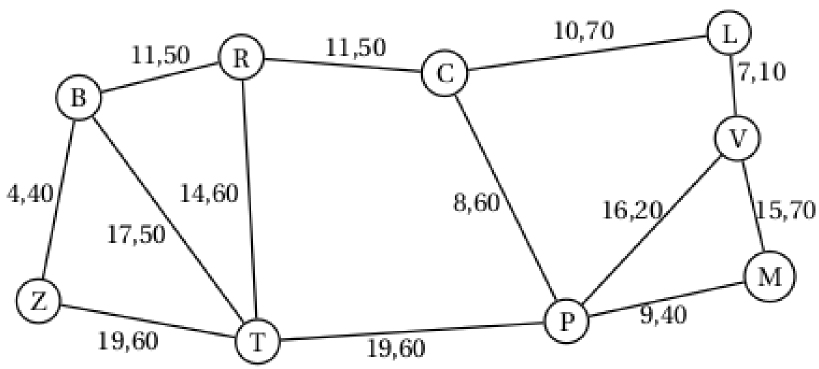
2) Un touriste atterrit à l'aéroport de Lyon et loue une voiture.
Déterminer, en justifiant, s'il pourra visiter toutes les villes en empruntant une et une seule fois chaque autoroute.

3) Il décide finalement d'aller seulement de Lyon à Biarritz.
On note N la matrice associée au graphe, les sommets étant rangés dans l'ordre alphabétique : B, C, L, M, P, R, T, V, Z.
Voici les matrices N et N^3 :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } N^3 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 1 & 3 & 6 & 6 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 5 & 2 & 8 & 6 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 0 & 2 & 1 & 0 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 5 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 8 & 1 & 5 & 2 & 1 & 8 & 7 & 1 \\ 6 & 6 & 0 & 2 & 1 & 2 & 8 & 3 & 2 \\ 6 & 1 & 3 & 1 & 8 & 8 & 4 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 5 & 4 & 7 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 0 & 1 & 1 & 2 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) En détaillant le calcul, déterminer le coefficient de la troisième ligne et dernière colonne de la matrice N^4.
b) En donner une interprétation.

4) Sur les arêtes du graphe sont maintenant indiqués les prix des péages en euro.



a) À l'aide de l'algorithme de Dijkstra, déterminer le chemin que doit prendre le touriste pour minimiser le coût des péages de Lyon à Biarritz.
b) Déterminer le coût, en euro, de ce trajet.

Exercice 3

Léa est inscrite sur les réseaux sociaux et consulte régulièrement sa page.

On considère que :

- Si Léa s'est connectée un certain jour, la probabilité qu'elle se connecte le lendemain est égale à $0,9$.
- Si Léa ne s'est pas connectée un certain jour, la probabilité qu'elle se connecte le lendemain est égale à $0,8$.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note a_n la probabilité que Léa se connecte le n-ième jour et b_n la probabilité qu'elle ne se connecte pas le n-ième jour.
On a donc : $a_n + b_n = 1$.

Le 1er jour, Léa ne s'est pas connectée, on a donc $a_1 = 0$.

1) **a)** Traduire les données par un graphe probabiliste.

b) Préciser la matrice M de transition associée à ce graphe.

c) Déterminer la probabilité que Léa se connecte le troisième jour.

2) Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a : $a_{n+1} = 0,1a_n + 0,8$.

3) On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier $n \geqslant 1$, par $u_n = a_n - \dfrac{8}{9}$.

a) Montrer que (u_n) est une suite géométrique, préciser sa raison et son premier terme.

b) Exprimer u_n puis a_n en fonction de n.

4) **a)** Déterminer en justifiant la limite de (a_n).

b) Interpréter ce résultat.

Exercice 4

Les parties A et B sont indépendantes

Alors qu'une entreprise A possédait le monopole de l'accès à internet des particuliers, une entreprise concurrente B est autorisée à s'implanter.
Lors de l'ouverture au public en 2010 des services du fournisseur d'accès B, l'entreprise A possède 90 % du marché et l'entreprise B possède le reste du marché.
Dans cet exercice, on suppose que chaque année, chaque internaute est client d'une seule entreprise A ou B.
On observe à partir de 2010 que chaque année, 15 % des clients de l'entreprise A deviennent des clients de l'entreprise B, et 10 % des clients de l'entreprise B deviennent des clients de l'entreprise A.
Pour tout entier naturel n, on note a_n la probabilité qu'un internaute de ce pays, choisi au hasard, ait son accès à internet fourni par l'entreprise A pour l'année $2010 + n$, et b_n, la probabilité pour que son fournisseur d'accès en $2010 + n$ soit l'entreprise B.
On note $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ la matrice correspondant à l'état probabiliste de l'année $2010 + n$ et on a ainsi $a_0 = 0,9$ et $b_0 = 0,1$.

Partie A

1) Représenter cette situation par un graphe probabiliste.

2) **a)** Déterminer la matrice de transition M de ce graphe.

b) Montrer qu'en 2013, l'état probabiliste est environ $\begin{pmatrix} 0,61 & 0,39 \end{pmatrix}$.

c) Déterminer l'état stable $P = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ de la répartition des clients des entreprises A et B. Interpréter le résultat.

Partie B

Lors d'une campagne de marketing l'entreprise B distribue un stylo ou un porte-clés ; il en coûte à l'entreprise 0,80 € par stylo et 1,20 € par porte-clés distribué.
À la fin de la journée l'entreprise a distribué 550 objets et cela lui a coûté 540 €.
On cherche le nombre s de stylos et le nombre c de porte-clés distribués.

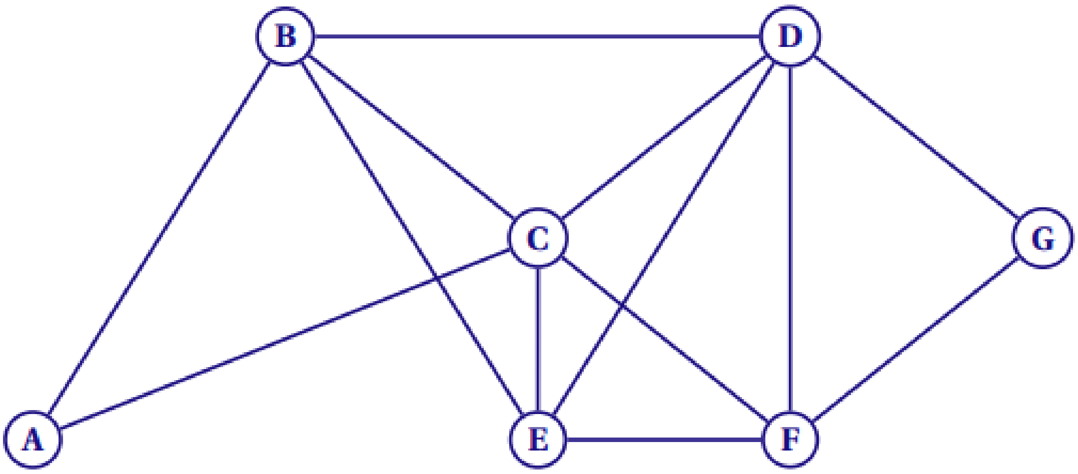
1) Écrire un système traduisant cette situation.

2) Montrer que le système précédent est équivalent à $R \times X = T$ où $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0,8 & 1,2 \end{pmatrix}$ et X et T sont des matrices que l'on précisera.

3) Résoudre le système à l'aide de la calculatrice. Interpréter le résultat.

Exercice 5

Dans le graphe ci-dessous, les sommets représentent différentes zones de résidence ou d'activités d'une municipalité. Une arête reliant deux de ces sommets indique l'existence d'une voie d'accès principale entre deux lieux correspondants.



1) Donner, sans justifier, le degré de chacun des sommets (la réponse pourra être présentée sous forme de tableau où les sommets seront mis dans l'ordre alphabétique).

2) **a)** Donner la matrice M associée au graphe (les sommets seront mis dans l'ordre alphabétique).

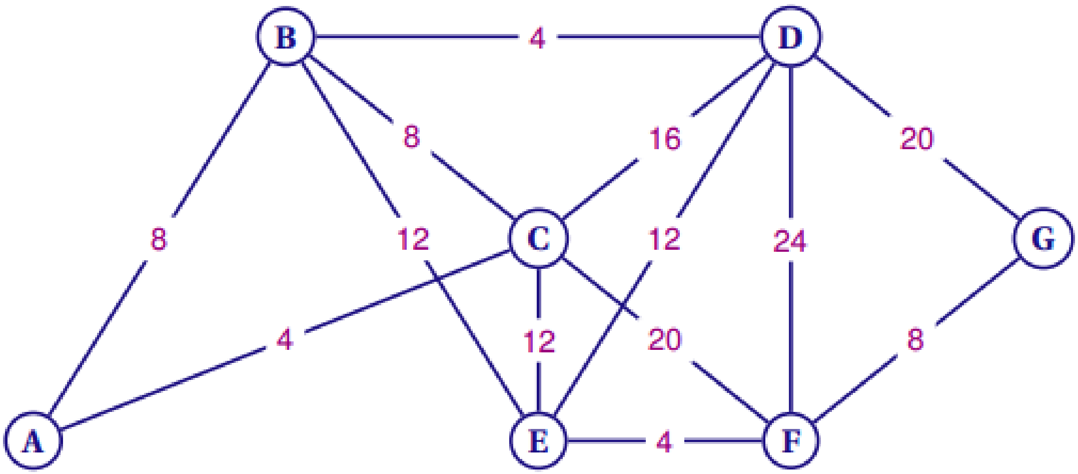
b) On donne la matrice $M^3 = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 8 & 5 & 5 & 5 & 3 \\ 7 & 8 & 12 & 13 & 12 & 8 & 5 \\ 8 & 12 & 12 & 15 & 13 & 13 & 5 \\ 5 & 13 & 15 & 12 & 13 & 12 & 8 \\ 5 & 12 & 13 & 13 & 10 & 12 & 5 \\ 5 & 8 & 13 & 12 & 12 & 8 & 7 \\ 3 & 5 & 5 & 8 & 5 & 7 & 2 \end{pmatrix}$

Déterminer, en justifiant, le nombre de chemins de longueur 3 reliant A et F puis donner leur liste.

3) Pour sa campagne électorale, un candidat souhaite parcourir toutes les voies d'accès principales de ce quartier sans emprunter plusieurs fois la même voie.

Montrer qu'un tel parcours est possible.

4) Dans le graphe ci-dessous, les valeurs indiquent, en minutes, les durées moyennes des trajets entre les différents lieux via les transports en commun.



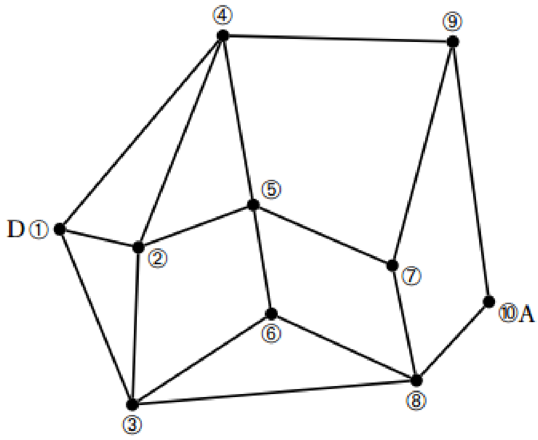
Ce même candidat se trouve à la mairie (A) quand on lui rappelle qu'il a un rendez-vous avec le responsable de l'hôpital situé en zone G.

a) En utilisant l'algorithme de Dijkstra, déterminer le chemin de durée minimale que ce candidat devra emprunter pour arriver à son rendez-vous.

b) Combien de temps faut-il prévoir pour effectuer ce trajet ?

Exercice 6

Un guide de randonnée en montagne décrit les itinéraires possibles autour d'un pic rocheux.
La description des itinéraires est donnée par le graphe ci-contre. Les sommets de ce graphe correspondent aux lieux remarquables. Les arêtes de ce graphe représentent les sentiers possibles entre ces lieux.



Légende :

①	Départ	②	Passerelle
③	Roche percée	④	Col des 3 vents
⑤	Pic rouge	⑥	Refuge
⑦	Col vert	⑧	Pont Napoléon
⑨	Cascade des anglais	⑩	Arrivée

1) Donner un itinéraire allant de D à A passant par tous les sommets du graphe une seule fois mais n'empruntant pas forcément tous les sentiers.

2) Existe-t-il un itinéraire allant de D à A utilisant tous les sentiers une seule fois ?
Justifier votre réponse.

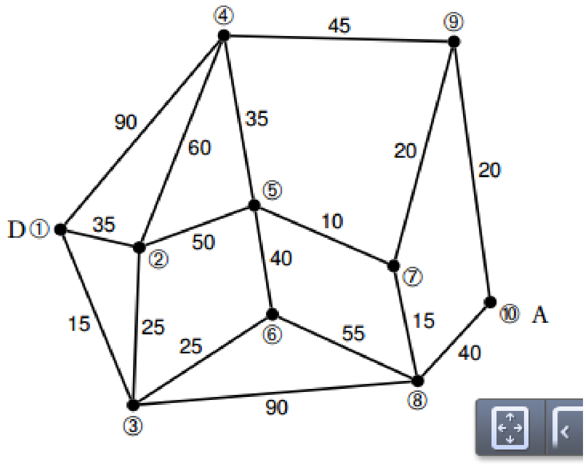
3) On note M la matrice d'adjacence associée à ce graphe, les sommets étant pris dans l'ordre. On donne ci-dessous M^5.

$$M^5 = \begin{pmatrix} 56 & 78 & 75 & 82 & 59 & 57 & 54 & 40 & 26 & 31 \\ 78 & 88 & 95 & 89 & 96 & 57 & 50 & 65 & 48 & 30 \\ 75 & 95 & 68 & 68 & 77 & 68 & 46 & 73 & 52 & 23 \\ 82 & 89 & 68 & 62 & 98 & 49 & 29 & 79 & 67 & 13 \\ 59 & 96 & 77 & 98 & 50 & 82 & 80 & 40 & 24 & 46 \\ 57 & 57 & 68 & 49 & 82 & 36 & 25 & 68 & 49 & 16 \\ 54 & 50 & 46 & 29 & 80 & 25 & 10 & 73 & 60 & 5 \\ 40 & 65 & 73 & 79 & 40 & 68 & 73 & 32 & 14 & 48 \\ 26 & 48 & 52 & 67 & 24 & 49 & 60 & 14 & 6 & 39 \\ 31 & 30 & 23 & 13 & 46 & 16 & 5 & 48 & 39 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Que représente le nombre 89 situé sur la deuxième ligne et la quatrième colonne ?

b) Déterminer le nombre d'itinéraires allant de D à A empruntant 5 sentiers. Citer un tel itinéraire passant par le pic rouge.

4) On a complété ci-dessous le graphe décrivant les itinéraires avec les temps de parcours en minutes pour chacun des sentiers.



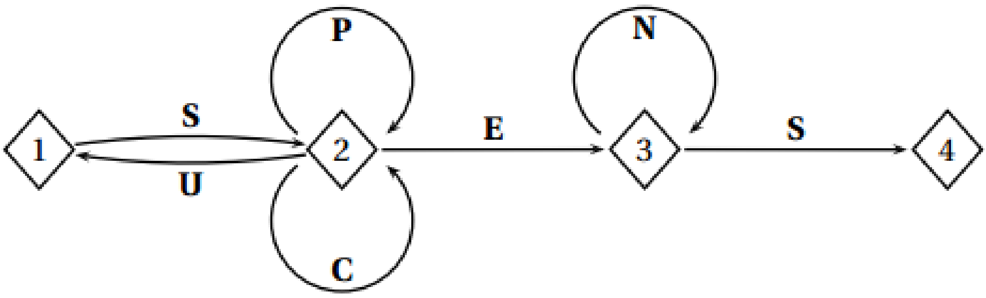
Déterminer l'itinéraire allant de D à A le plus court en temps.
On fera apparaître la démarche en utilisant un algorithme.

Exercice 7

Les deux parties de l'exercice sont indépendantes.

Partie A

Pour accéder à sa messagerie, Antoine a choisi un code qui doit être reconnu par le graphe étiqueté suivant, de sommets 1, 2, 3 et 4 :



Une succession des lettres constitue un code possible si ces lettres se succèdent sur un chemin du graphe orienté ci-dessus, en partant du sommet 1 et en sortant au sommet 4. Les codes SES et SPPCES sont ainsi des codes possibles, contrairement aux codes SUN et SPEN.

1) Parmi les trois codes suivants, écrire sur votre copie le (ou les) code(s) reconnu(s) par le graphe.

SUCCES SCENES SUSPENS

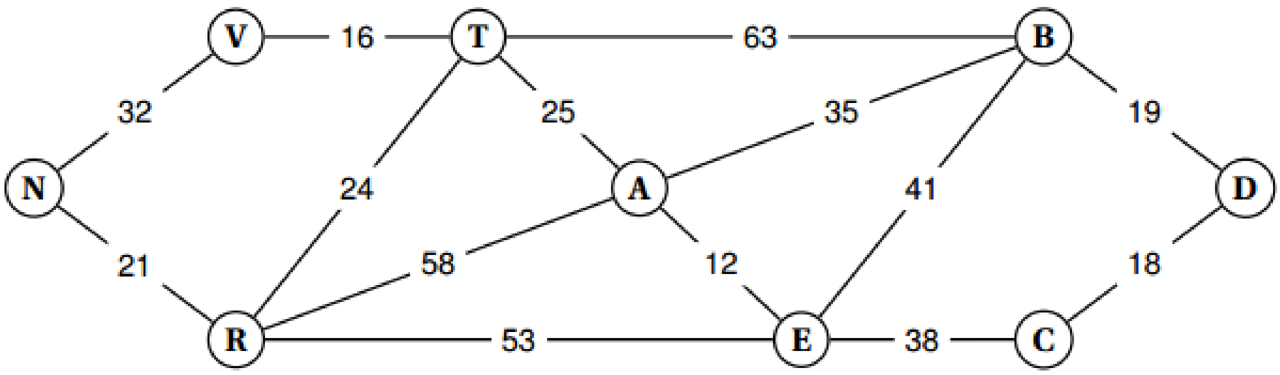
2) Recopier et compléter la matrice d'adjacence A associée au graphe. On prendra les sommets dans l'ordre 1-2-3-4.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

3) Avec une calculatrice on a calculé : $A^4 = \begin{pmatrix} 5 & 12 & 8 & 3 \\ 12 & 29 & 20 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

En déduire le nombre de codes de 4 lettres reconnus par le graphe. Quels sont ces codes ?

Partie B



Antoine décide d'aller visiter neuf châteaux de la Loire.
Il a construit le graphe ci-dessus où les sommets représentent :

A : Amboise B : Blois C : Cheverny D : Chambord

E : Chenonceau T : Tours V : Villandry R : Azay-le-Rideau

N : Chinon

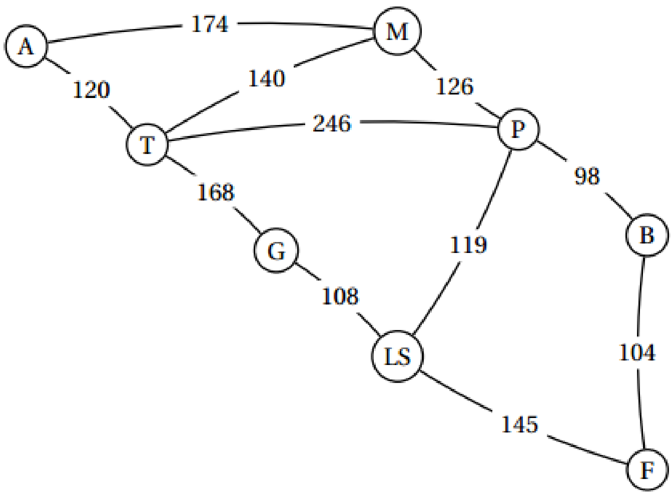
Sur les arêtes sont indiquées les distances en km.

1) Antoine peut-il partir de Blois et y revenir, en parcourant une et une seule fois chacune des routes matérialisées par les arêtes de ce graphe ? On justifiera la réponse.

2) Déterminer le plus court chemin pour aller du château de Chambord au château de Chinon. On donnera le parcours ainsi que le nombre total de kilomètres.

Exercice 8

Un chauffeur-livreur réside en Italie dans la ville d'Aoste.
Quatre fois par mois, son employeur l'envoie livrer du matériel informatique dans la ville de Florence.
Il est établi que le trajet en camion coûte, en carburant, $0,51$ euro au kilomètre. Le chauffeur dispose d'un budget mensuel de 2 200 euros pour son carburant. Ce qu'il réussit à économiser lui permet de toucher une prime P équivalente en fin de mois.
li consulte donc la carte routière ci-dessous pour optimiser ses trajets.
Le graphe ci-dessous indique les distances entre différentes villes d'Italie : Aoste, Milan, Parme, Turin, Gènes, La Spézia, Bologne et Florence. Chaque ville est désignée par son initiale.



Les deux parties sont indépendantes.

Partie A : étude du trajet

1) Déterminer le trajet le plus court entre Aoste et Florence. (On indiquera les villes parcourues et l'ordre de parcours).
2) Déterminer le budget carburant nécessaire aux quatre voyages aller-retour du mois (le résultat sera arrondi à l'euro près).
   En déduire le montant de la prime P qui lui sera versée en fin de mois, à l'euro près.

Partie B : traversée de Parme

Durant son trajet, le chauffeur est obligé de traverser Parme et ses très nombreux feux tricolores. Lorsque le feu est orange, le chauffeur se comporte comme lorsqu'il est rouge, il s'arrête.
L'expérience lui a permis d'établir que s'il se présente à un feu, il se produit les évènements suivants :

- Arrivé au feu, celui-ci est au vert (V) : la probabilité que le suivant soit vert est de $0,85$.
- Arrivé au feu, celui-ci est orange ou rouge (R) : la probabilité que le suivant soit vert est de $0,30$.

1) Représenter la situation par un graphe probabiliste.
2) Indiquer la matrice de transition M du graphe, en considérant les sommets dans l'ordre (V, R) en ligne comme en colonne.
3) Le premier feu rencontré est vert. La matrice P_1 donnant l'état initial est donc $(1 \quad 0)$.
   a) Déterminer les matrices $P_2 = P_1 \times M$ et $P_3 = P_2 \times M$. (Le détail des calculs n'est pas demandé.
   b) Conclure quant à la probabilité p de l'évènement « Le chauffeur doit s'arrêter au troisième feu ».

Exercice 9

Dans une entreprise, la société de débit boisson CAFTHÉ installe deux machines : l'une ne sert que du café et l'autre ne sert que du thé.
Chaque jour lors de la pause déjeuner, chaque employé de l'entreprise choisit une boisson, et une seule : café ou thé. On suppose que le nombre total d'employés de l'entreprise reste constant au cours du temps.
La société CAFTHÉ pense que la machine à café sera toujours la plus utilisée. Une enquête, effectuée sur plusieurs jours, auprès des employés pour connaitre leurs choix de boisson a montré que :
- 97 % des employés qui choisissent un café un jour donné prennent encore un café le lendemain.
- 98 % des employés qui choisissent un thé un jour donné prennent encore un thé le lendemain.

On admet que cette tendance se poursuit les jours suivants.

Le premier jour, 70 % des employés ont choisi un café.
On note C l'état « L'employé choisit un café » et T l'état « L'employé choisit un thé ».
Pour tout entier naturel n non nul, on note :
- c_n la probabilité de l'évènement « un employé, pris au hasard, choisit un café le jour n » ;
- t_n la probabilité de l'évènement « un employé, pris au hasard, choisit un thé le jour n » ;
- P_n la matrice $\begin{pmatrix} c_n & t_n \end{pmatrix}$ correspondant à l'état probabiliste le jour n.

1) Traduire les données de l'énoncé par un graphe probabiliste de sommets C et T.

2) Déterminer la matrice P_1 donnant l'état probabiliste le premier jour.

3) La matrice de transition M de ce graphe, en considérant les sommets dans l'ordre C et T est $M = \begin{pmatrix} 0,97 & 0,03 \\ 0,02 & 0,98 \end{pmatrix}$.

Déterminer la probabilité, arrondie au centième, qu'un employé choisisse un thé le quatrième jour.

4) **a)** Montrer que l'état stable est $\begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$.

b) Est-ce que la société CAFTHÉ avait raison quant à l'utilisation de la machine à café à long terme ?

5) **a)** Exprimer P_{n+1} en fonction de P_n.
En déduire que pour tout entier n, on a $c_{n+1} = 0,95 \times c_n + 0,02$.

b) On considère l'algorithme suivant :

Variables :	A est un réel
	i et n sont des entiers naturels
Entrée :	Saisir n
Initialisation :	Affecter à A la valeur $0,70$
Traitement :	Pour i de 1 à n
	Affecter à A la valeur $0,95 \times A + 0,02$
	Fin Pour
Sortie :	Afficher A

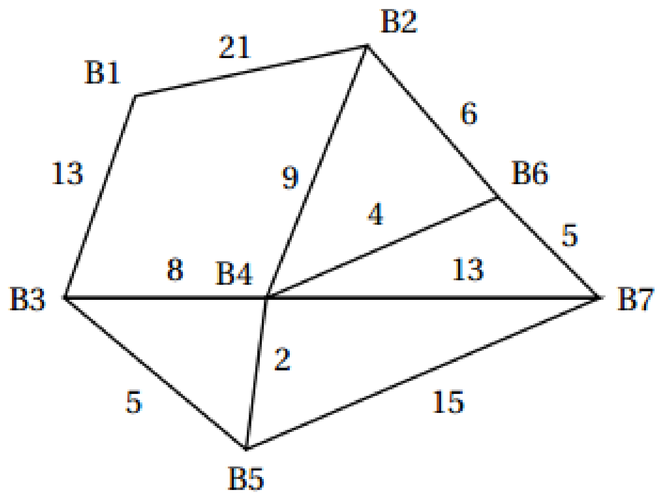
En faisant apparaître les différentes étapes, donner la valeur affichée par cet algorithme lorsque la valeur de n est égale à 3.
Que permet de déterminer cet algorithme ?

Exercice 10

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

Un club sportif organise une course d'orientation. Sept postes de contrôles (appelés balises) sont prévus.
Les sept balises notées B1 ; B2 ; ... ; B7 sont représentées sur le graphe ci-contre. Les arêtes du graphe représentent les chemins possibles entre les balises et sur chaque arête est indiqué le temps de parcours estimé en minutes.



1) a) Le graphe est-il connexe ? Justifier la réponse.
   b) Existe-t-il un parcours qui permet de revenir à une balise de départ en passant une et une seule fois par tous les chemins ? Justifier la réponse.
   c) Existe-t-il un parcours qui permet de relier deux balises différentes en passant une et une seule fois par tous les chemins ?
2) Les organisateurs décident de situer le départ à la balise B1 et l'arrivée à la balise B7. Chaque participant doit rallier la balise B7 en un minimum de temps. Ils ne sont pas tenus à emprunter tous les chemins.
   Quelle est la durée minimale du parcours possible et quel est ce parcours ? Justifier votre réponse à l'aide d'un algorithme.

Partie B

Depuis l'année 2011, ce club sportif propose à ses licenciés une assurance spécifique. La première année, 80 % des licenciés y ont adhéré. En 2012, 70 % des licenciés ayant adhéré en 2011 ont conservé cette assurance et 60 % de ceux n'ayant pas adhéré en 2011 ont adhéré en 2012.
En supposant que cette évolution se maintienne, le club sportif souhaite savoir quel pourcentage de licenciés adhèrera à cette assurance à plus long terme. On note :
A « le licencié est assuré »
B « le licencié n'est pas assuré »

Pour tout entier n non nul, l'état probabiliste du nombre d'assurés l'année $2011+n$ est défini par la matrice ligne $P_n = (x_n \quad y_n)$ où x_n désigne la probabilité pour un licencié d'être assuré l'année $2011+n$.

1) Représenter cette situation par un graphe probabiliste de sommets A et B.
2) Écrire la matrice de transition M de ce graphe en prenant les sommets A et B dans cet ordre.
3) En remarquant que $P_0 = (0,8 \quad 0,2)$, déterminer P_1. Interpréter ce résultat.
4) Le club sportif maintiendra son offre d'assurance spécifique si le nombre d'assurés reste supérieur à 55 %. L'évolution prévue lui permet-elle d'envisager le maintien de son offre à long terme ?

Exercice 11

Une entreprise de produits cosmétiques fait réaliser une étude marketing sur une population donnée.

Cette étude montre que lors de la sortie d'une nouvelle crème hydratante, la probabilité qu'une cliente l'achète lors de la première vente promotionnelle est de $0,2$.
De plus, lorsqu'une cliente a acheté une crème hydratante lors d'une vente promotionnelle, la probabilité qu'elle en achète à nouveau lors de la vente promotionnelle suivante est de $0,8$. Lorsqu'une cliente n'a pas acheté de crème hydratante, la probabilité pour qu'elle en achète à la vente promotionnelle suivante est de 0,3.
n étant un entier naturel non nul, on note :

- a_n la probabilité qu'une cliente achète une crème hydratante lors de la n-ième vente promotionnelle.
- b_n la probabilité qu'une cliente n'achète pas une crème hydratante lors de la n-ième vente promotionnelle.
- $P_n = (a_n \quad b_n)$ la matrice ligne traduisant l'état probabiliste à la n-ième vente promotionnelle.

1) **a)** Déterminer P_1.

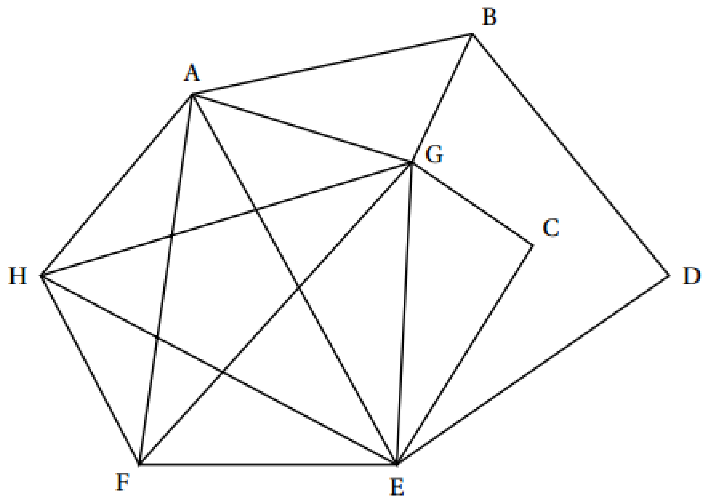
b) Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets :
V quand il y a achat ;
$\overline{V}$ quand il n'y a pas achat.

2) **a)** Écrire la matrice M de transition associée à ce graphe.

b) Calculer P_2 et P_3. D'après ces résultats, quel est l'effet de ces trois premières ventes promotionnelles ?

3) Justifier qu'il existe un état stable $P = (a \quad b)$ pour cette situation. Le déterminer.

4) L'étude marketing montre que certains produits ne sont jamais achetés simultanément. On représente les incompatibilités par le graphe suivant, où deux sommets reliés représentent deux produits qui ne sont jamais dans une même commande. Par exemple, les produits A et B, représentés par des sommets reliés, ne sont jamais dans une même commande.



L'entreprise souhaite répartir les produits dans des lots constitués de produits ne présentant aucune incompatibilité d'achat. Combien de lots doit-elle prévoir au minimum ? Justifier votre réponse à l'aide d'un algorithme et proposer une répartition des produits.

Exercice 12

Les parties A et B de cet exercice sont indépendantes.

Un lycée d'une grande ville de province organise un forum des grandes écoles de la région pour aider ses élèves dans leurs choix d'orientation post-bac.

PARTIE A

Une des écoles a effectué une étude sur la mobilité des étudiants de la promotion de 2008 en ce qui concerne les choix de carrière.
Elle a relevé qu'en 2008, à la fin de leurs études, 25 % des diplômés sont partis travailler à l'étranger alors que le reste de la promotion a trouvé du travail en France.
On a observé ensuite qu'à la fin de chaque année, 20 % des personnes ayant opté pour l'étranger reviennent sur un poste en France alors que 10 % des personnes travaillant en France trouvent un poste à l'étranger. On considère que cette situation perdure.
On note $P_n = (e_n \quad f_n)$ la matrice correspondant à l'état probabiliste en $2008 + n$, avec e_n la probabilité que la personne travaille à l'étranger, f_n celle qu'elle travaille en France.
Ainsi $P_0 = (0,25 \quad 0,75)$.

1) Proposer le graphe probabiliste associé à cette situation. On désignera par E (étranger) et F (France) les deux sommets.

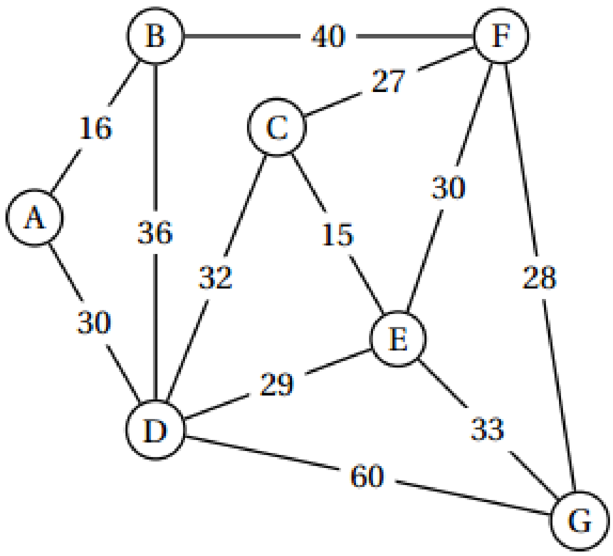
2) Donner la matrice de transition M associée en prenant les sommets dans l'ordre E puis F.

3) Montrer qu'en 2011, la proportion des étudiants de la promotion 2008 travaillant à l'étranger est de $30,475$ %.

4) Déterminer l'état stable du graphe probabiliste et interpréter le résultat obtenu.

PARTIE B

Pour clôturer cette journée, un groupe de lycéens musiciens a décidé d'organiser un concert. Ils décident de faire le tour de tous les lycées de la ville et de distribuer des prospectus sur le trajet pour faire de la publicité pour cette soirée. Les membres du groupe ont établi le graphe ci-contre. Les sommets représentent les différents lycées et les arêtes, les rues reliant les établissements. Les arêtes sont pondérées par les durées des trajets entre deux sommets consécutifs, exprimées en minutes.



1) Existe- t -il un trajet d'un lycée à un autre permettant de parcourir toutes les rues une fois et une seule ?
Si oui, donner un tel trajet, si non expliquer pourquoi.

2) Arrivé en retard au lycée A, un membre du groupe veut trouver le chemin le plus rapide pour rejoindre ses camarades au lycée G. Quel trajet peut-il prendre ? Quelle est alors la durée du parcours ?

Exercice 13

Dans la commune de Girouette, deux partis s'affrontent aux élections tous les ans.
En 2010, le parti Hirondelle l'a emporté avec 70 % des voix contre 30 % au parti Phénix.
On admet qu'à partir de l'année 2010 :

14 % des électeurs votant pour le parti Hirondelle à une élection voteront pour le parti Phénix à l'élection suivante.

6 % des électeurs votant pour le parti Phénix à une élection voteront pour le parti Hirondelle à l'élection suivante.

Les autres ne changent pas d'avis.

On considère un électeur de Girouette choisi au hasard.
On note H l'état « L'électeur vote pour le parti Hirondelle » et P l' état « L'électeur vote pour le parti Phenix ».

1) **a)** Représenter le graphe probabiliste associé à cette situation.

b) Déterminer la matrice de transition M en considérant les états dans l'ordre alphabétique.

2) On appelle $E_n = (h_n \quad p_n)$ la matrice ligne de l'état probabiliste de l'année $2010 + n$.
On a donc $E_0 = (0,7 \quad 0,3)$.
Déterminer E_1 et E_4. (On arrondira les coefficients de E_4 au centième). Interpréter les résultats.

3) **a)** Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $h_{n+1} = 0,8h_n + 0,06$.

b) On définit la suite (u_n) par : pour tout entier naturel $n,\ u_n = h_n - 0,3$.
Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique.

c) Montrer que pour tout entier naturel $n,\ h_n = 0,3 + 0,4 \times 0,8^n$.

4) À partir de combien d'années la probabilité qu'un électeur choisi au hasard vote pour le parti Hirondelle sera-t-elle strictement inférieure à $0,32$?

Exercice 14

Une étude est réalisée chaque hiver sur une population composée de personnes qui peuvent pratiquer le ski de piste ou le snowboard.
L'étude révèle que :

- Si une personne pratique le ski de piste, alors la probabilité qu'elle pratique le snowboard l'hiver suivant est égale à $0,2$.
- Si une personne pratique le snowboard, alors la probabilité qu'elle pratique le ski de piste l'hiver suivant est égale à $0,3$.

On note S l'état : ≪ la personne pratique le ski de piste ≫ et $\overline{S}$ l'état : ≪ la personne pratique le snowboard ≫.
On note également pour tout entier naturel n :

- p_n la probabilité qu'une personne pratique le ski de piste lors du n-ième hiver ;
- q_n la probabilité qu'une personne pratique le snowboard lors du n-ième hiver ;
- $P_n = (p_n \quad q_n)$ la matrice ligne donnant l'état probabiliste du système lors du n-ième hiver.

On suppose que la population initiale ne comporte que des personnes pratiquant le ski de piste, on a donc $P_0 = (1 \quad 0)$.

Partie A

1) Représenter la situation à l'aide d'un graphe probabiliste de sommets S et $\overline{S}$.

2) **a)** Donner la matrice de transition M de ce graphe probabiliste.

b) Calculer M^2.

c) Déterminer l'état probabiliste P_2.

3) Montrer que pour tout entier naturel n, on a $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,3$.

4) On considère l'algorithme suivant :

Variables :	
①	J et N sont des entiers naturels
②	p est un nombre réel
Entrée :	
③	Saisir N
Initialisation :	
④	p prend la valeur 1
Traitement :	
⑤	Pour J allant de 1 à N
⑥	p prend la valeur ....
⑦	Fin Pour
Sortie :	
⑧	Afficher p

Recopier et compléter la ligne ⑥ de cet algorithme afin d'obtenir la probabilité p_N.

Partie B

On considère, pour tout entier naturel n, l'évènement S_n : ≪ la personne pratique le ski de piste lors du n-ième hiver ≫. La probabilité de l'évènement S_n est notée $p(S_n)$. On a donc $p_n = p(S_n)$.
On sait d'après la **partie A** que pour tout entier naturel n, $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,3$.
Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = p_n - 0,6$.

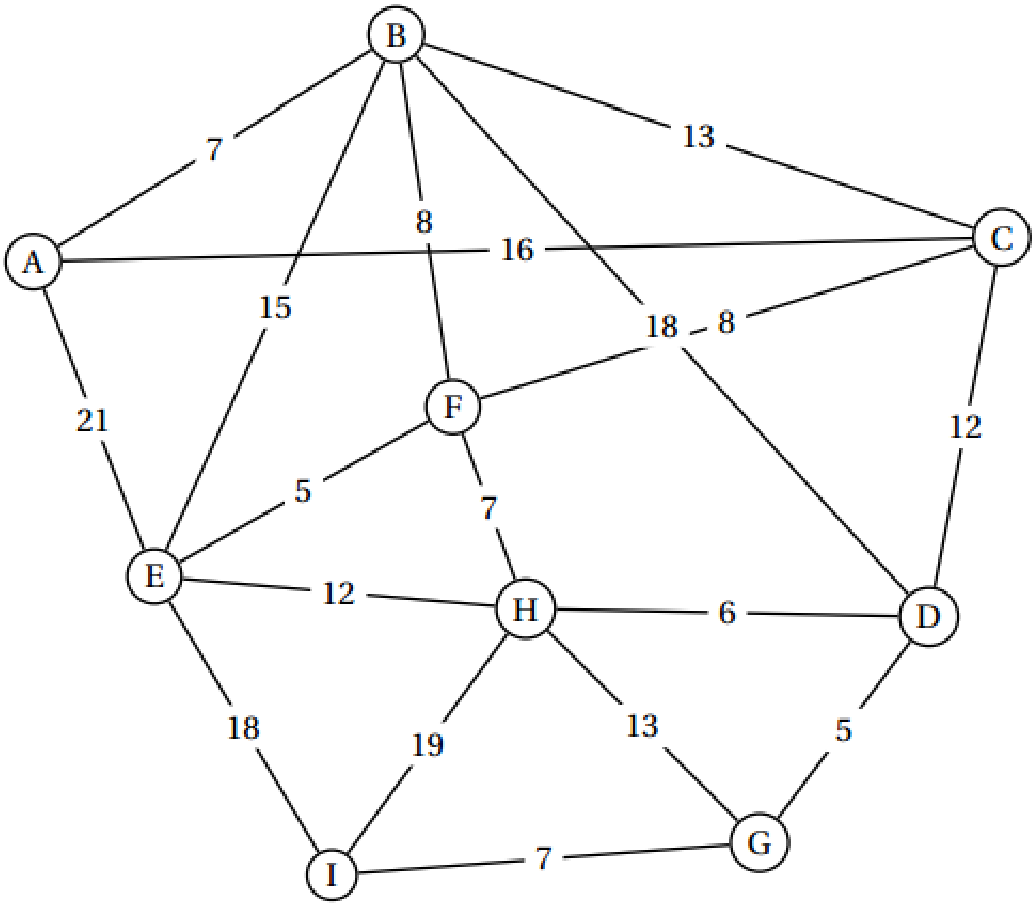
1) Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $0,5$ et préciser la valeur de u_0.

2) En déduire l'expression de u_n en fonction de n puis l'expression de p_n en fonction de n.

3) Déterminer la limite de la suite (p_n) et interpréter le résultat.

Partie C

Une partie du domaine skiable est représentée par le graphe ci-dessous.
Le sommet A représente le haut des pistes de ski et le sommet I en représente le bas.
Les sommets B, C, D, E, F, G et H représentent des points de passages.
Chacune des arêtes est pondérée par la distance, en centaine de mètres, entre deux sommets.



Déterminer, à l'aide de l'algorithme de Dijkstra, la distance minimale permettant de relier le sommet A au sommet I.

Exercice 15

On a observé l'évolution des inscriptions dans le club de gymnastique d'une ville.

Chaque année, 30 % des personnes inscrites au club de gymnastique l'année précédente renouvellent leur inscription au club.
De plus, chaque année, 10 % des habitants de la ville qui n'étaient pas inscrits au club l'année précédente s'y inscrivent.

On appelle n le nombre d'années d'existence du club.
On note g_n la proportion de la population de la ville inscrite au club de gymnastique lors de l'année n et p_n la proportion de la population qui n'y est pas inscrite.
La première année de fonctionnement du club (année « zéro »), 20 % des habitants de la ville se sont inscrits.
On note $E_n = (g_n \quad p_n)$ la matrice traduisant l'état probabiliste de l'année n. On a donc $E_0 = (0,2 \quad 0,8)$.

1) Traduire les données de l'énoncé par un graphe probabiliste.

2) On nomme A la matrice de transition associée à cette situation, c'est-à-dire la matrice vérifiant : pour tout entier naturel n, $E_{n+1} = E_n \times A$.
Donner la matrice A.

3) Déterminer E_1 et E_2. Interpréter les résultats.

4) Déterminer l'état probabiliste stable (on donnera les coefficients de la matrice ligne sous la forme de fractions irréductibles).
Comment peut-on interpréter ce résultat ?

Exercice 16

Les parties A et B sont indépendantes

Deux sociétés, Ultra-eau (U) et Vital-eau (V), se partagent le marché des fontaines d'eau à bonbonnes dans les entreprises d'une grande ville.

Partie A

En 2013, l'entreprise U avait 45 % du marché et l'entreprise V le reste. Chaque année, l'entreprise U conserve 90 % de ses clients, les autres choisissent l'entreprise V. Quant à l'entreprise V, elle conserve 85 % de ses clients, les autres choisissent l'entreprise U.
On choisit un client au hasard tous les ans et on note pour tout entier naturel n :

u_n la probabilité qu'il soit un client de l'entreprise U l'année $2013+n$, ainsi
$u_0 = 0,45$;

v_n la probabilité qu'il soit un client de l'entreprise V l'année $2013+n$.

1) Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets U et V.

2) Donner v_0, calculer u_1 et v_1.

3) On considère l'algorithme (incomplet) donné en annexe. Celui-ci doit donner en sortie les valeurs de u_n et v_n pour un entier naturel n saisi en entrée.
Compléter les lignes (L5) et (L8) de l'algorithme pour obtenir le résultat attendu.

4) On admet que, pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} = 0,75u_n + 0,15$.
On note, pour tout nombre entier naturel n, $w_n = u_n - 0,6$.

a) Montrer que la suite (w_n) est une suite géométrique de raison $0,75$.

b) Quelle est la limite de la suite (w_n) ? En déduire la limite de la suite (u_n). Interpréter le résultat dans le contexte de cet exercice.

Partie B

L'entreprise U fournit ses clients en recharges pour les fontaines à eau et dispose des résultats antérieurs suivants :

Nombre de recharges en milliers	1	3	5
Coût total annuel de production en centaines d'euros	11	27,4	83

Le coût total de production est modélisé par une fonction C définie pour tout nombre réel x de l'intervalle [0 ; 10] par :

$$C(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 10 \qquad a, b \text{ et } c \text{ sont des nombres réels.}$$

Lorsque le nombre x désigne le nombre de milliers de recharges produites, $C(x)$ est le coût total de production en centaines d'euros.
On admet que le triplet (a, b, c) est solution du système (S).

$$(S) \quad \begin{cases} a+b+c &= 1 \\ 27a+9b+3c &= 17,4 \\ 125a+25b+5c &= 73 \end{cases} \text{ et on pose } X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

1) **a)** Écrire ce système sous la forme $MX = Y$ où M et Y sont des matrices que l'on précisera.

b) On admet que la matrice M est inversible. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, le triplet (a, b, c) solution du système (S).

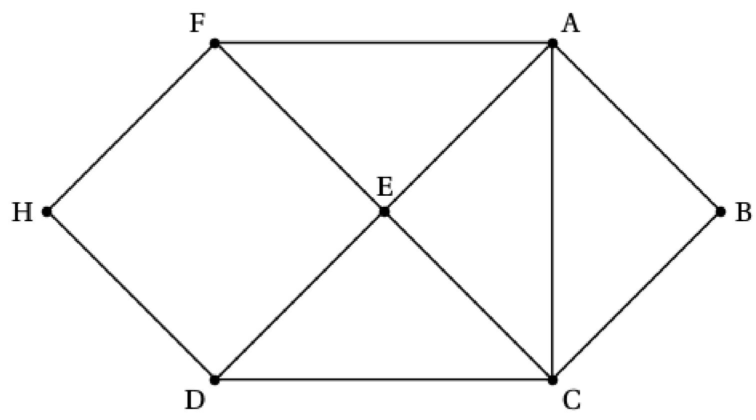
2) En utilisant cette modélisation, quel serait le coût total annuel de production pour 8 000 recharges d'eau produites ?

Annexe à l'exercice 2
Recopier sur la copie la partie « traitement » (lignes L3 à L9) en complétant les lignes L5 et L8.

Variables :	N est un nombre entier naturel non nul
	U et V sont des nombres réels
Traitement :	Saisir une valeur pour N
	Affecter à U la valeur 0,45
	Affecter à V la valeur ......
	Pour i allant de 1 jusqu'à N
	— affecter à U la valeur $0,9 \times U + 0,15 \times V$
	— affecter à V la valeur ......
	Fin Pour
Sortie :	Afficher U et Afficher V

Exercice 17

On a schématisé ci-dessous le plan d'une MJC (Maison de la Jeunesse et de la Culture) par un graphe dont les sommets sont les salles et les arêtes sont les passages (portes, couloirs ou escaliers) entre les salles. On appelle H le hall d'entrée et B le bureau du directeur.

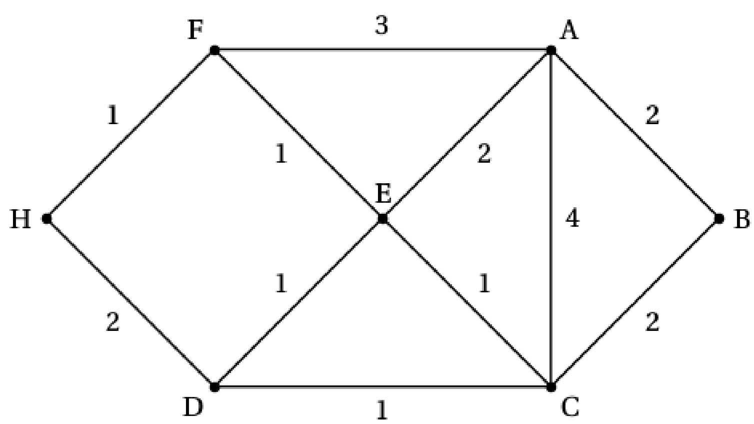


En fin de journée, un agent de service fait le tour de la MJC pour récupérer dans chaque salle (bureau du directeur et hall inclus) les objets oubliés par les enfants.

1) Préciser si ce graphe est connexe en justifiant la réponse.
2) Déterminer, en justifiant, si l'agent de service peut passer par toutes les salles en utilisant une fois et une seule chaque passage.
3) On range les sommets par ordre alphabétique.
   Donner la matrice d'adjacence M associée au graphe.
4) On donne :

$$M^4 = \begin{pmatrix} 31 & 15 & 26 & 21 & 27 & 18 & 12 \\ 15 & 12 & 15 & 12 & 18 & 12 & 6 \\ 26 & 15 & 31 & 18 & 27 & 21 & 12 \\ 21 & 12 & 18 & 20 & 17 & 18 & 5 \\ 27 & 18 & 27 & 17 & 34 & 17 & 16 \\ 18 & 12 & 21 & 18 & 17 & 20 & 5 \\ 12 & 6 & 12 & 5 & 16 & 5 & 10 \end{pmatrix}$$

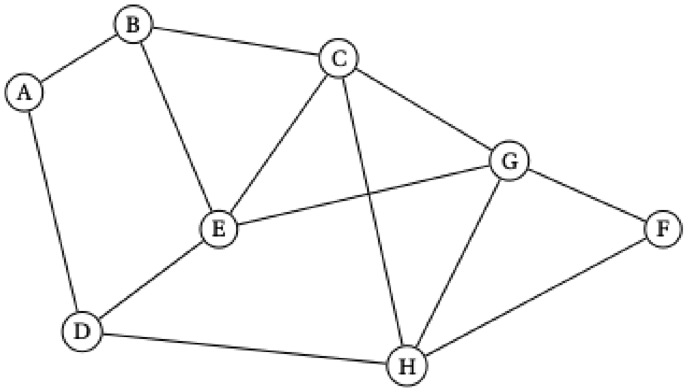
   En déduire le nombre de chemins de longueur 4 entre les sommets B et H.
5) On a indiqué sur le graphe ci-dessous le temps en minute mis pour passer entre les différentes salles en ouvrant et fermant les portes à clé.



   Déterminer le temps minimal pour aller du hall d'entrée au bureau du directeur (de H à B).

Exercice 18

Lors d'une campagne électorale, un homme politique doit effectuer une tournée dans les villes A, B, C, D, E, F, G et H, en utilisant le réseau autoroutier. Le graphe $\mathcal{G}$ ci-dessous, représente les différentes villes de la tournée et les tronçons d'autoroute reliant ces villes (une ville est représentée par un sommet, un tronçon d'autoroute par une arête) :



Partie A

1) Déterminer, en justifiant, si le graphe $\mathcal{G}$ est :

a) complet ;

b) connexe.

2) **a)** Justifier qu'il est possible d'organiser la tournée en passant au moins une fois par chaque ville, tout en empruntant une fois et une seule chaque tronçon d'autoroute.

b) Citer un trajet de ce type.

3) On appelle M la matrice d'adjacence associée au graphe $\mathcal{G}$ (les sommets étant pris dans l'ordre alphabétique).

a) Déterminer la matrice M.

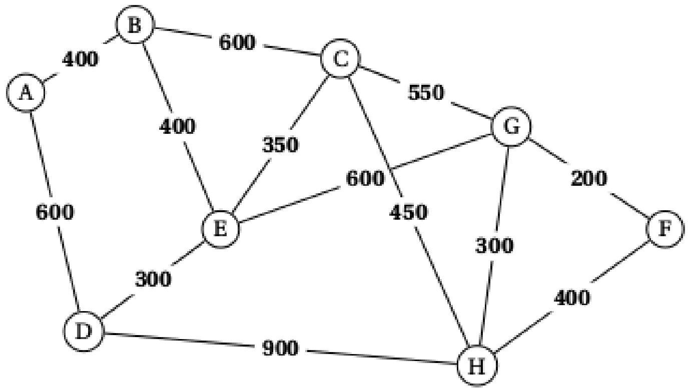
b) On donne la matrice

$$M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 & 5 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & 7 & 2 & 8 & 3 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 6 & 4 & 9 & 3 & 9 & 10 \\ 5 & 2 & 4 & 0 & 9 & 2 & 3 & 8 \\ 1 & 8 & 9 & 9 & 4 & 4 & 10 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 2 & 4 & 2 & 6 & 6 \\ 4 & 3 & 9 & 3 & 10 & 6 & 6 & 9 \\ 1 & 5 & 10 & 8 & 4 & 6 & 9 & 4 \end{pmatrix}$$

Déterminer, en justifiant, le nombre de chemins de longueur 3 reliant E à H.
Préciser ces chemins.

Partie B

Des contraintes d'organisation obligent cet homme politique à se rendre dans la ville F après la ville A. Le graphe $\mathcal{G}$ est complété ci-dessous par les longueurs en kilomètre de chaque tronçon d'autoroute.

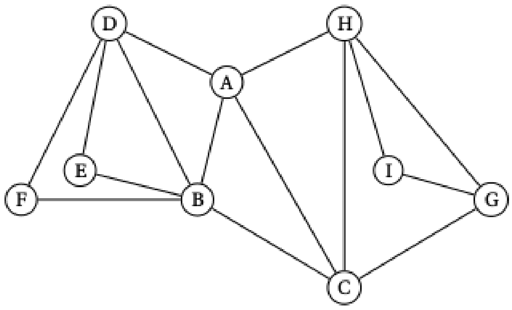


Déterminer, en utilisant l'algorithme de Dijkstra, le trajet autoroutier le plus court pour aller de A à F.
Préciser la longueur en kilomètre de ce trajet.

Exercice 19

Partie A : Étude d'un graphe

On considère le graphe $\mathcal{G}$ ci-dessous.



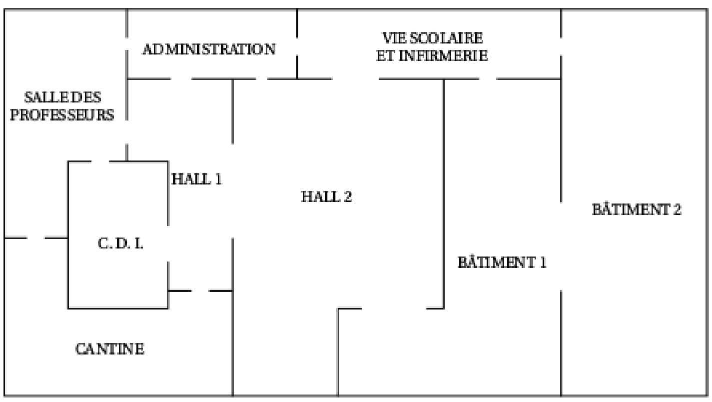
1) **a)** Déterminer en justifiant si le graphe $\mathcal{G}$ est complet.
   b) Déterminer en justifiant si le graphe $\mathcal{G}$ est connexe.
2) **a)** Donner le degré de chacun des sommets du graphe $\mathcal{G}$.
   b) Déterminer en justifiant si le graphe $\mathcal{G}$ admet un cycle eulérien ou une chaîne eulérienne.
3) **a)** Donner la matrice M associée au graphe $\mathcal{G}$ (les sommets seront rangés dans l'ordre alphabétique).
   b) On donne : $M^2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

   Montrer, par le calcul, que le coefficient de la septième ligne et quatrième colonne de la matrice M^3 est égal à 3.

Partie B : Applications

Dans cette partie, on pourra justifier les réponses en s'aidant de la partie A

On donne ci-dessous le plan simplifié d'un lycée.



1) Le graphe $\mathcal{G}$ donné en partie A modélise cette situation.
   Recopier et compléter le tableau suivant :

Sommet du graphe $\mathcal{G}$	A	B	C	D	E	F	G	H	I
Lieu correspondant dans le lycée									

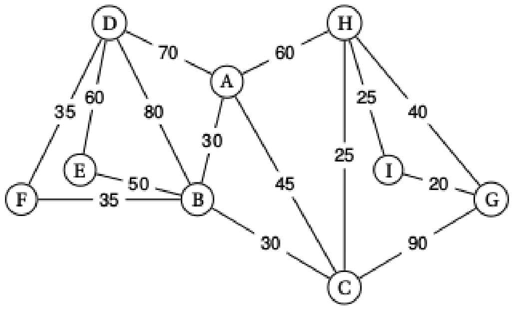
2) Un élève a cours de mathématiques dans le bâtiment 1. À la fin du cours, il doit rejoindre la salle des professeurs pour un rendez vous avec ses parents.

Déterminer le nombre de chemins en trois étapes permettant à l'élève de rejoindre ses parents puis indiquer quels sont ces chemins.

3) Le lycée organise une journée portes-ouvertes.

a) Déterminer, en justifiant, s'il est possible de visiter le lycée en empruntant une seule fois chaque passage entre les différents lieux.

b) Sur les arêtes du graphe $\mathcal{G}$ sont indiqués les temps de parcours exprimés en seconde entre deux endroits du lycée.



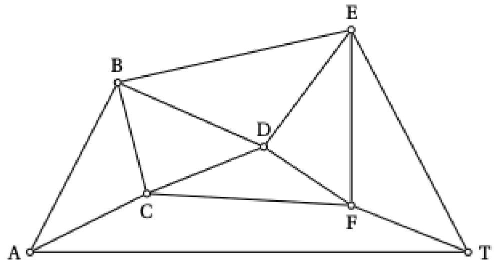
Déterminer, à l'aide de l'algorithme de Dijkstra, le chemin permettant de relier le sommet G au sommet D en un temps minimal.

Déterminer ce temps minimal, exprimé en seconde.

Exercice 20

Partie A

Le graphe ci-dessous représente, dans un aéroport donné, toutes les voies empruntées par les avions au roulage. Ces voies, sur lesquelles circulent les avions avant ou après atterrissage, sont appelées taxiways.
Les arêtes du graphe représentent les voies de circulation (les « taxiways ») et les sommets du graphe sont les intersections.

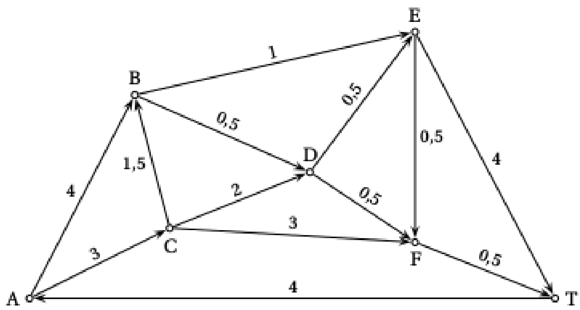


1) Déterminer le nombre de voies de circulation au total.

2) Afin que l'aéroport soit déneigé le plus rapidement possible, est-il possible de planifier un parcours pour que les chasse-neige passent par toutes les voies sans emprunter plusieurs fois la même route ? Justifier la réponse et donner un tel parcours.

Partie B

Dans le graphe ci-dessous, on a indiqué le sens de circulation pour les avions dans les différentes voies ainsi que le temps de parcours pour chacune en minute(s).



1) **a)** Écrire la matrice M associée à ce graphe (ranger les sommets dans l'ordre alphabétique).

b) Citer tous les chemins de longueur 3 reliant A à T.

2) L'avion qui a atterri est en bout de piste en A et doit se rendre le plus rapidement possible au terminal situé au point T.
Déterminer l'itinéraire le plus rapide et en donner la durée.

Exercice 21

Partie A

Une entreprise E commande chaque semaine ses fournitures auprès de deux fournisseurs A et H.
Les constats faits les premières semaines conduisent à modéliser l'évolution du choix du fournisseur pour les commandes d'une semaine à l'autre par un graphe probabiliste de sommets A et H où :

- A désigne l'état : « La commande est passée auprès du fournisseur A » ;
- H désigne l'état : « La commande est passée auprès du fournisseur H ».

La matrice de transition M de ce graphe, en considérant les sommets dans l'ordre A et H,
est $M = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,05 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$.

1) Dessiner le graphe probabiliste associé à la matrice M.

2) Donner la signification du nombre $0,95$ dans la matrice M.

Pour tout entier naturel n, on note :

— a_n la probabilité de l'évènement : « La semaine n, l'entreprise E commande ses fournitures auprès du fournisseur A » ;

— h_n la probabilité de l'évènement : « La semaine n, l'entreprise E commande ses fournitures auprès du fournisseur H » ;

— P_n la matrice $\begin{pmatrix} a_n & h_n \end{pmatrix}$ correspondant à l'état probabiliste pour la semaine n.

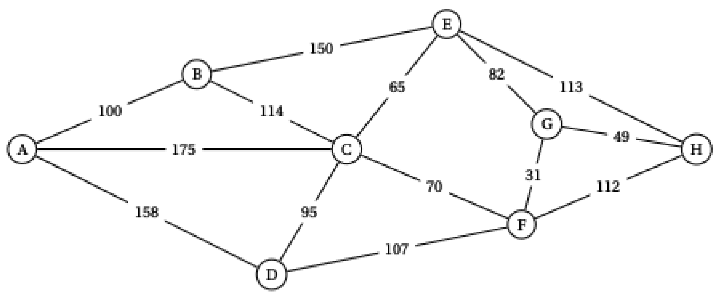
3) Vérifier que la matrice ligne $P = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ correspond à l'état stable du système. En donner une interprétation.

4) On donne $P_0 = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$ et on rappelle que $P_k = P_0 \times M^k$, pour k entier naturel.

Déterminer la semaine où, pour la première fois, la probabilité que l'entreprise E commande ses fournitures auprès du fournisseur A dépasse la probabilité qu'elle les commande auprès du fournisseur H.

Partie B

Le directeur de l'entreprise E rend visite à ses fournisseurs, il se rend du fournisseur A au fournisseur H et souhaite effectuer le moins de kilomètres possible.
Son assistant dresse le graphe suivant qui schématise les trajets, en kilomètres, entre les six villes de la région, notées B ; C ; D ; E ; F et G et les deux sites, A et H.



Déterminer l'itinéraire le plus court reliant les deux sites A et H et indiquer le nombre de kilomètres à effectuer. Justifier la réponse.

Exercice 22

Les services commerciaux d'une grande surface de produits alimentaires ont défini un profil de client qui a été appelé « consommateur bio ».

Sur la base d'observations réalisées les années précédentes, il a été constaté que :

90 % des clients « consommateur bio » maintenaient cette pratique l'année suivante ;

15 % des clients n'ayant pas le profil de « consommateur bio » entraient dans la catégorie « consommateur bio » l'année suivante.

On suppose que cette évolution se poursuit d'une année à l'autre à partir de 2013, année au cours de laquelle il a été constaté que 20 % des clients ont le profil « consommateur bio ».
Par un tirage aléatoire effectué tous les ans, on choisit un client de cette grande surface.
Pour tout nombre entier naturel n on note :

b_n, la probabilité que le client choisi lors de l'année 2013 + n soit un « consommateur bio » ;

c_n, la probabilité que le client choisi lors de l'année $2013 + n$ ne soit pas un « consommateur bio » ;

P_n, la matrice ligne $(b_n \;\; c_n)$ donnant l'état probabiliste lors de l'année $2013 + n$.

1) **a)** Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets B et C où B correspond à l'état « consommateur bio ».

b) Donner P_0 l'état probabiliste en 2013 et la matrice M de transition correspondant à ce graphe, les sommets B et C étant classés dans cet ordre.

c) On donne la matrice M^2 :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0,825 & 0,175 \\ 0{,}262\,5 & 0{,}737\,5 \end{pmatrix}.$$

En précisant la méthode de calcul, déterminer la probabilité que le client choisi en 2015 soit un « consommateur bio ».

d) Déterminer l'état stable $(b \;\; c)$ du graphe probabiliste.

2) Le directeur du supermarché affirme que, dans un futur proche, plus de la moitié de sa clientèle aura le profil de « consommateur bio ».

a) Recopier et compléter l'algorithme suivant qui doit permettre de déterminer le nombre minimal d'années pour que l'affirmation du directeur soit vérifiée.

Variables :	N un nombre entier naturel non nul
	B un nombre réel
Traitement :	Affecter à N la valeur 0
	Affecter à B la valeur $0,2$
	Affecter à C la valeur $0,8$
	Tant que ...
	affecter à B la valeur $0,9 \times B + 0,15 \times C$
	affecter à C la valeur $1 - B$
	affecter à N la valeur $N + 1$
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher ...

b) Déterminer le nombre minimal d'années recherché en expliquant la démarche.

Exercice 23

Alice participe à une compétition de tir à l'arc ; elle effectue plusieurs lancers de flèches.
Lorsqu'elle atteint la cible à un lancer, la probabilité qu'elle atteigne la cible au lancer suivant est égale à $0,9$.
Lorsqu'elle a manqué la cible à un lancer, Alice se déconcentre et la probabilité qu'elle atteigne la cible au lancer suivant est égale à $0,4$.
On suppose qu'au premier lancer, elle a autant de chances d'atteindre la cible que de la manquer.
Pour tout nombre entier naturel n strictement positif, on note :

a_n la probabilité qu'Alice atteigne la cible au n-ième lancer ;

b_n la probabilité qu'Alice manque la cible au n-ième lancer ;

$P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne traduisant l'état probabiliste au n-ième lancer.

1) **a)** Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B (A représentant l'état « Alice atteint la cible » et B l'état « Alice manque sa cible »).

b) Indiquer la matrice de transition M associée à ce graphe. On prendra les sommets A et B dans l'ordre (A, B).

c) Justifier que $P_1 = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$ et $P_2 = \begin{pmatrix} 0,65 & 0,35 \end{pmatrix}$.

2) **a)** Montrer que, pour tout nombre entier n strictement positif, $a_{n+1} = 0,9a_n + 0,4b_n$.

b) En déduire que, pour tout nombre entier n strictement positif, $a_{n+1} = 0,5a_n + 0,4$.

3) **a)** Compléter l'algorithme fourni en annexe 1 de façon à ce qu'il affiche l'état probabiliste au n-ième lancer.

b) Déterminer l'affichage de cet algorithme pour $n = 5$.

4) **a)** On considère la suite (u_n) définie pour tout nombre entier naturel n strictement positif par : $u_n = a_n - 0,8$.
Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) Donner l'expression de u_n en fonction de n, puis en déduire que pour tout nombre entier naturel n strictement positif, $a_n = 0,8 - 0,3 \times 0,5^{n-1}$.

c) À long terme, que peut-on penser de la probabilité qu'Alice atteigne la cible ?

d) Par quelle autre méthode aurait-on pu trouver le résultat précédent ?

Annexe à rendre avec la copie

Entrées

Saisir n

Traitement

a prend la valeur 0,5

b prend la valeur 0,5

Pour i allant de 2 à n

  a prend la valeur $\ldots\ldots \times a + \ldots$

  b prend la valeur $1 - a$

Fin Pour

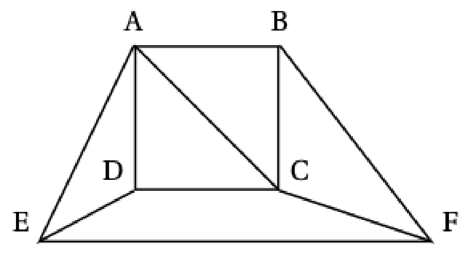
Sortie

Afficher a, b

Exercice 24

Partie A

Le graphe suivant représente le plan d'une ville. Les arêtes du graphe représentent les principales avenues et les sommets du graphe les carrefours entre ces avenues.



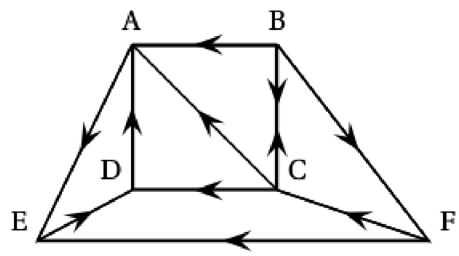
1) Donner l'ordre du graphe puis le degré de chacun des sommets.

2) Un piéton peut-il parcourir toutes ces avenues sans emprunter plusieurs fois la même avenue :

- **a)** en partant d'un carrefour et en revenant à son point de départ ? Justifier la réponse.
- **b)** en partant d'un carrefour et en arrivant à un carrefour différent ? Justifier la réponse.

Partie B

Dans le graphe ci-contre, on a indiqué, pour cette même ville, le sens de circulation pour les véhicules sur les différentes avenues.



1) Peut-on trouver un trajet de longueur quelconque qui permet d'aller de D à B en respectant les sens de circulation ? Justifier la réponse.

2) Écrire la matrice M associée à ce graphe (on rangera les sommets dans l'ordre alphabétique)

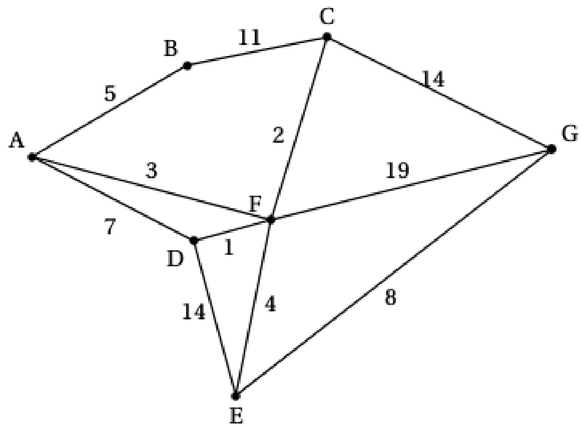
1) On donne la matrice

$$M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- **a)** Que représentent les coefficients de cette matrice ?
- **b)** Combien y-a-t-il de chemins de longueur 3 partant du carrefour B et arrivant en A ?
  Écrire tous ces chemins.
- **c)** Combien y-a-t-il de chemins de longueur 3 arrivant au point E ? Expliquer la démarche.

Exercice 25

Dans le jeu vidéo « Save the princess », l'objectif est d'aller délivrer une princesse tout en récoltant des trésors situés dans les couloirs du château.
Le plan du château est représenté par le graphe pondéré ci-dessous. Les sommets de ce graphe représentent les salles et les arêtes représentent les couloirs reliant les salles entre elles.



Partie A

1) Le joueur se trouve dans la salle A. Il décide de visiter chacun des couloirs afin de trouver le plus de trésors possibles. Peut-il trouver un trajet lui permettant de passer par tous les couloirs une et une seule fois ? Justifier la réponse.

2) Dans chaque couloir se trouve un certain nombre de monstres. Les étiquettes du graphe pondéré donnent le nombre de monstres présents dans les couloirs.

Le joueur souhaite, en partant de A, rejoindre la princesse enfermée dans la salle G. Déterminer le chemin qu'il doit prendre pour délivrer la princesse en combattant le moins de monstres possible.

Combien de monstres aurait-il alors à affronter ?

Partie B

Pour un joueur régulier, on estime que :

s'il gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la partie suivante est $0,7$;

s'il perd une partie, la probabilité qu'il perde la partie suivante est $0,6$.

On note $P_n = \begin{pmatrix} u_n & v_n \end{pmatrix}$ l'état probabiliste lors de la n-ième partie où u_n désigne la probabilité que la partie soit gagnée et v_n celle que la partie soit perdue.

1) Traduire les données de l'énoncé par un graphe probabiliste. On nommera les sommets U (pour la partie gagnée) et V (pour la partie perdue).

2) En déduire la matrice de transition en considérant les sommets dans l'ordre U, V.

3) On suppose la première partie perdue, l'état probabiliste initial est donc $P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Montrer que la probabilité que le joueur gagne la 3ᵉ partie est $0,52$.

4) Déterminer la probabilité que le joueur gagne la 15ᵉ partie.

Arrondir le résultat au centième.

Exercice 26

Pour satisfaire ses adhérents, un club de sport a instauré trois niveaux d'apprentissage :

DÉBUTANT (D), CONFIRMÉ (C) et EXPERT (E).

Au 1er septembre 2012, lors de l'inscription, le club comptait :

- 30 % de débutants ;
- 50 % de confirmés ;
- 20 % d'experts.

D'une année sur l'autre, on constate que :

- parmi les adhérents de niveau débutant, 40 % restent à ce niveau et 60 % passent au niveau confirmé ;
- parmi les adhérents de niveau confirmé, 60 % restent à ce niveau et 40 % passent au niveau expert ;
- parmi les adhérents de niveau expert, 80 % restent à ce niveau, 10 % redescendent au niveau confirmé et les autres 10 % préfèrent reprendre les bases au niveau débutant.

On considère qu'il n'y a pas de nouveaux venus ni de départs dans le club.

Soit $P_n = (d_n \quad c_n \quad e_n)$ la matrice ligne décrivant l'état probabiliste de la répartition parmi les trois niveaux d'apprentissage D, C et E au 1er septembre de l'année $2012 + n$ pour tout entier naturel n.

1) **a)** Donner sans justification la matrice P_0.

b) Traduire la situation par un graphe probabiliste de sommets D, C et E.
On donne la matrice carrée M de transition en respectant l'ordre D, C, E des sommets.

$$M = \begin{pmatrix} 0,4 & \underline{\mathbf{0,6}} & 0 \\ 0 & 0,6 & 0,4 \\ 0,1 & 0,1 & \underline{\mathbf{0,8}} \end{pmatrix}$$

Dans la suite de l'exercice, on pourra utiliser les résultats suivants (résultats arrondis au millième) :

$$M^5 = \begin{pmatrix} 0,085 & 0,331 & 0,584 \\ 0,097 & 0,293 & 0,610 \\ 0,104 & 0,298 & 0,598 \end{pmatrix} \qquad M^{10} = \begin{pmatrix} 0,100 & 0,299 & 0,601 \\ 0,100 & 0,300 & 0,600 \\ 0,100 & 0,300 & 0,600 \end{pmatrix}$$

2) Dans cette matrice on lit **0,6** et **0,8** en italique gras.

a) Préciser, à l'aide d'une phrase, à quoi correspondent ces deux valeurs en lien avec la situation étudiée.

b) Calculer P_1.

c) Déterminer la répartition prévisible, en pourcentages, des adhérents dans ce club de sport au 1er septembre 2017. Les résultats seront donnés à $0,1$ % près.

3) **a)** En calculant P_{10}, émettre une conjecture sur la matrice P correspondant à l'état probabiliste stable.

b) Vérifier cette conjecture.

c) Quelle conclusion peut-on en tirer pour la répartition des adhérents ?

Exercice 27

La première semaine de l'année, le responsable de la communication d'une grande entreprise propose aux employés de se déterminer sur un nouveau logo, le choix devant être fait par un vote en fin d'année.
Deux logos, désignés respectivement par A et B, sont soumis au choix.
Lors de la présentation qui se déroule la première semaine de l'année, 24 % des employés sont favorables au logo A et tous les autres employés sont favorables au logo B.
Les discussions entre employés font évoluer cette répartition tout au long de l'année.
Ainsi 9 % des employés favorables au logo A changent d'avis la semaine suivante et 16 % des employés favorables au logo B changent d'avis la semaine suivante.

Pour tout $n,\ n \geqslant 1$, on note :

- a_n la probabilité qu'un employé soit favorable au logo A la semaine n ;
- b_n la probabilité qu'un employé soit favorable au logo B la semaine n ;
- P_n la matrice $\begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ traduisant l'état probabiliste la semaine n.

On a donc, pour tout $n \geqslant 1,\ a_n + b_n = 1$ et $P_1 = \begin{pmatrix} 0,24 & 0,76 \end{pmatrix}$.

1) Traduire la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B.

2) Déterminer la matrice de transition M de ce graphe, en rangeant les sommets dans l'ordre alphabétique.

3) **a)** À l'aide de la relation $P_{n+1} = P_n \times M$, exprimer, pour tout $n \geqslant 1,\ a_{n+1}$ en fonction de a_n et de b_n.

b) En déduire que l'on a, pour tout $n \geqslant 1,\ a_{n+1} = 0,75a_n + 0,16$.

4) À l'aide de la calculatrice, donner, sans justifier, la probabilité à $0,001$ près qu'un employé soit favorable au logo A la semaine 4.

5) On note $P = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ l'état stable de la répartition des employés.

a) Déterminer un système de deux équations que doivent vérifier a et b.

b) Résoudre le système obtenu dans la question précédente.

c) On admet que l'état stable est $P = \begin{pmatrix} 0,64 & 0,36 \end{pmatrix}$. Interpréter le résultat.

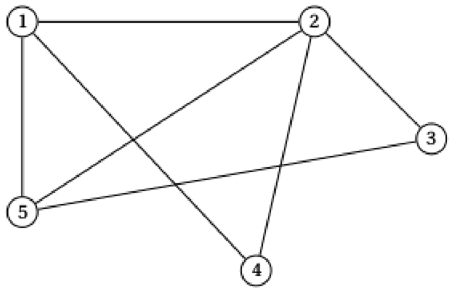
6) On considère l'algorithme suivant :

VARIABLES :	A est un réel
	N est un entier naturel
INITIALISATION :	A prend la valeur $0,24$
	N prend la valeur 0
TRAITEMENT :	Tant que $A < 0,639$
	N prend la valeur $N + 1$
	A prend la valeur $0,75 \times A + 0,16$
	Fin du Tant que
SORTIE :	Afficher N

Préciser ce que cet algorithme permet d'obtenir (on ne demande pas de donner la valeur de N affichée).

Exercice 28

Un parc de loisirs propose à ses visiteurs des parcours d'accrobranches.
Les différents parcours sont modélisés par le graphe Γ ci-dessous où les sommets correspondent aux cinq arbres marquant leurs extrémités. Chaque parcours est représenté par une arête du graphe et peut être réalisé dans les deux sens.



1) L'organisateur du parc de loisirs souhaite que les visiteurs puissent, s'ils le souhaitent, réaliser un itinéraire complet d'accrobranches, c'est-à-dire un itinéraire empruntant une fois et une seule chaque parcours et en commençant cet itinéraire par l'arbre numéro 1.

Justifier que ce souhait est réalisable et proposer un tel itinéraire.

2) On note M la matrice associée au graphe Γ en considérant les sommets pris dans l'ordre croissant des numéros d'arbres.

a) Écrire la matrice M.

b) On donne, ci-dessous, les matrices M^2 et M^3.

$$M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad M^3 = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 3 & 5 & 7 \\ 7 & 6 & 6 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 2 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 3 & 2 & 3 \\ 7 & 7 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

L'organisateur du parc de loisir souhaite organiser des ≪ itinéraires express ≫ qui débuteront à l'arbre numéro 1, emprunteront trois parcours d'accrobranches et finiront à l'arbre 4. Ces itinéraires peuvent éventuellement emprunter plusieurs fois le même parcours.

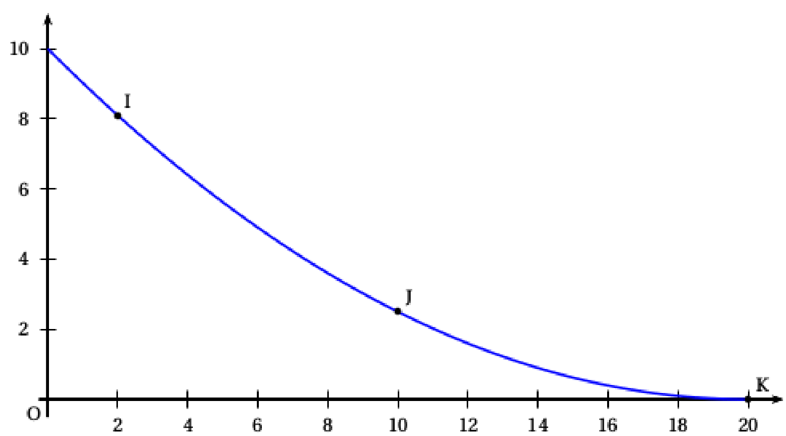
Déterminer, en justifiant votre résultat, le nombre ≪ d'itinéraires express ≫

réalisables.

(On ne demande pas de donner ces différents itinéraires)

3) Pour terminer ces ≪ itinéraires express ≫, on installe un toboggan géant sur l'arbre 4.

La forme de ce toboggan est modélisée par une fonction f dont la courbe $\mathcal{C}$ est donnée ci-dessous dans un repère orthonormé.



Cette courbe passe par les points I, J et K de coordonnées respectives (2 ; 8,1), (10 ; 2,5) et (20 ; 0).

La fonction f est définie sur [0 ; 20] par

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

où a, b et c sont trois nombres réels.

a) Justifier que a, b et c sont solutions du système : $\begin{cases} 400a + 20b + c &= 0 \\ 100a + 10b + c &= 2,5 \\ 4a + 2b + c &= 8,1 \end{cases}$

b) Déterminer les matrices X et V pour que le système précédent soit équivalent à

$$UX = V \quad \text{où} \quad U = \begin{pmatrix} 400 & 20 & 1 \\ 100 & 10 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) Déterminer a, b et c.

Exercice 29

Une société est spécialisée dans la vente en ligne de produits de haute technologie sur internet.

Partie A

La société réalise tout au long de l'année des journées promotionnelles pour attirer ses clients sur son site internet. Elle leur envoie un courrier électronique annonçant chaque journée de promotion.
Parmi les clients, 5 % d'entre eux ont visité le site internet de la société lors de la première journée de promotion.
Une étude portant sur le comportement des clients auxquels la société a envoyé ce type de message a mis en évidence que :

- trois clients sur cinq ayant visité le site internet lors d'une journée promotionnelle, le visitent à nouveau lors de 1a journée promotionnelle suivante ;
- un client sur cinq n'ayant pas visité le site internet lors d'une journée promotionnelle, le visite lors de la journée promotionnelle suivante.

On choisit. au hasard, un client ayant reçu le message annonçant la première journée promotionnelle.
On formule l'hypothèse que les comportements des clients observés lors de l'étude n'évoluent pas d'une journée promotionnelle à la suivante.
Pour tout entier naturel n non nul, on note l'état probabiliste ainsi défini par la matrice ligne $P_n = \begin{pmatrix} x_n & y_n \end{pmatrix}$, où x_n désigne la probabilité que le client, pris au hasard, visite le site internet de la société lors de la n-ième journée de promotion.

1) Pour une journée promotionnelle donnée, on note V, l'évènement ≪ le client a visité le site internet lors de la journée promotionnelle ≫.
Représenter cette situation par un graphe probabiliste de sommets V et $\overline{V}$.

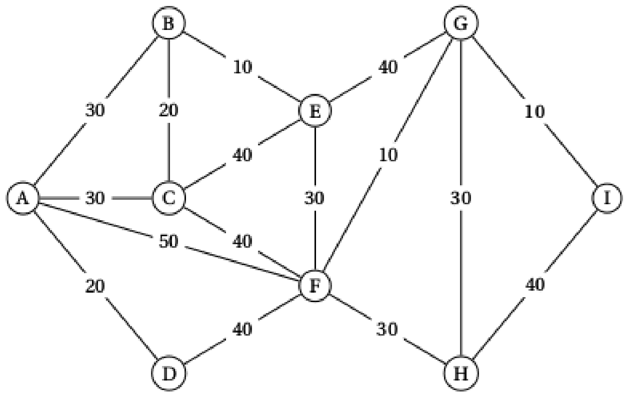
2) Écrire la matrice de transition M de ce graphe en prenant les sommets V et $\overline{V}$ dans cet ordre.

3) En remarquant que $P_1 = \begin{pmatrix} 0,05 & 0,95 \end{pmatrix}$, déterminer P_2. Interpréter ce résultat.

4) On admet que le taux de visites se stabilise à long terme. Montrer que $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ est un état stable de ce système.

Partie B

Le réseau informatique de cette société est constitué d'un ensemble de routeurs interconnectés à l'aide de fibres optiques haut débit. Le graphe qui suit schématise l'architecture de ce réseau. Les sommets représentent les routeurs et les arêtes représentent les fibres optiques.
On a fait figurer les durées de transfert des données (en millisecondes) d'un routeur à un autre sur les fibres optiques du réseau de la société.



1) Chaque année la société doit vérifier l'état physique de la fibre optique installée sur son réseau. Un robot inspecte toute la longueur de la fibre optique afin de s'assurer qu'elle ne présente pas de détérioration apparente.
Peut-il parcourir l'ensemble du réseau en suivant les fibres optiques et en empruntant chaque fibre optique une et une seule fois ? Justifier la réponse.
Si un tel parcours est possible, préciser par quel(s) routeur(s) du réseau le robot doit commencer son inspection.

2) Un ordinateur, relié au routeur A envoie un paquet de données à un ordinateur relié au routeur I.
Le paquet de données a mis 70 ms pour transiter du routeur A au routeur I. Ce paquet de données a-t-il emprunté le chemin le plus rapide sur le réseau ? Justifier la réponse.

Exercice 30

Les sites internet A, B, C ont des liens entre eux. Un internaute connecté sur un de ces trois sites peut, à toutes les minutes, soit y rester soit utiliser un lien vers un des deux autres sites.

- Pour un internaute connecté sur le site A, la probabilité d'utiliser le lien vers B est de 0,2 et celle d'utiliser le lien vers C est de 0,2.
- Pour un internaute connecté sur le site B, la probabilité d'utiliser le lien vers A est de 0,1 et celle d'utiliser le lien vers C est de 0,4.
- Pour un internaute connecté sur le site C, la probabilité d'utiliser le lien vers A est de 0,2 mais il n'y a pas de lien direct avec B.

L'unité de temps est la minute, et à un instant $t = 0$, le nombre de visiteurs est, respectivement sur les sites A, B et C : 100, 0 et 0.
On représente la distribution des internautes sur les trois sites après t minutes par une matrice N_t ; ainsi $N_0 = \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
On suppose qu'il n'y a ni déconnexion pendant l'heure (de $t = 0$ à $t = 60$) ni nouveaux internautes visiteurs.

1) Représenter le graphe probabiliste de sommets A, B et C correspondant à la situation décrite.

2) Écrire la matrice M de transition associée à ce graphe (dans l'ordre A, B, C).

3) On donne

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0,42 & 0,22 & 0,36 \\ 0,19 & 0,27 & 0,54 \\ 0,28 & 0,04 & 0,68 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M^{20} \approx \begin{pmatrix} 0{,}312\,5 & 0,125 & 0{,}562\,5 \\ 0{,}312\,5 & 0,125 & 0{,}562\,5 \\ 0{,}312\,5 & 0,125 & 0{,}562\,5 \end{pmatrix}.$$

Calculer N_2. Interpréter le résultat obtenu.

4) Calculer $N_0 \times M^{20}$. Conjecturer la valeur de l'état stable et interpréter la réponse.

5) Un des internautes transmet un virus à tout site qu'il visitera.
Il se connecte initialement sur le site C et commence sa navigation.
À l'instant $t = 0$, le site C est donc infecté.

- **a)** Quelle est la probabilité qu'à l'instant $t = 1$ le site A soit infecté ?
- **b)** Quelle est la probabilité qu'à l'instant $t = 2$ les trois sites soient infectés ?

Exercice 31

Dans un pays, seulement deux opérateurs de téléphonie mobile SAFIR et TECIM proposent la 4G (standard de transmission de données).
Une étude a montré que d'une année à l'autre :

- 41 % des clients de l'opérateur SAFIR le quittent pour l'opérateur TECIM ;
- 9 % des clients de l'opérateur TEcIM le quittent pour l'opérateur SAFIR ;
- Aucun client ne renonce à l'utilisation de la 4G.

Cette situation peut être modélisée par un graphe probabiliste $\mathcal{G}$ de sommets S et T où :

- S est l'évènement « l'utilisateur de la 4G est un client de l'opérateur SAFIR » ;
- T est l'évènement « l'utilisateur de la 4G est un client de l'opérateur TECIM ».

Chaque année on choisit au hasard un utilisateur de la 4G et on note pour tout entier naturel n :

- s_n la probabilité que cet utilisateur soit un client de l'opérateur SAFIR en $2014 + n$;
- t_n la probabilité que cet utilisateur soit un client de l'opérateur TECIM en $2014 + n$.

On note $P_n = (s_n \quad t_n)$ la matrice ligne de l'état probabiliste pour l'année $2014 + n$.
Dans cet exercice, on se propose de savoir si l'opérateur TECIM atteindra l'objectif d'avoir comme clients au moins 80 % de la population utilisatrice de la 4G.

Partie A

1) Dessiner le graphe probabiliste $\mathcal{G}$.

2) On admet que la matrice de transition du graphe $\mathcal{G}$ en considérant les sommets dans l'ordre S et T est $M = \begin{pmatrix} 0,59 & 0,41 \\ 0,09 & 0,91 \end{pmatrix}$.

On note $P = (a \quad b)$ la matrice ligne correspondant à l'état stable de ce graphe $\mathcal{G}$.

a) Montrer que les nombres a et b sont solutions du système $\begin{cases} 0,41a - 0,09b & = & 0 \\ a + b & = & 1 \end{cases}$.

b) Résoudre le système précédent.

3) On admet que $a = 0,18$ et $b = 0,82$. Déterminer, en justifiant, si l'opérateur TECIM peut espérer atteindre son objectif.

Partie B

En 2014, on sait que 35 % des utilisateurs de la 4G sont des clients de l'opérateur SAFIR et que 65 % sont des clients de l'opérateur TECIM. Ainsi $P_0 = (0,35 \quad 0,65)$.

1) Déterminer la répartition des clients de la 4G au bout de 2 ans.

2) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $t_{n+1} = 0,5t_n + 0,41$.

3) Pour déterminer au bout de combien d'années l'opérateur TECIM atteindra son objectif, on a commencé par élaborer l'algorithme ci-dessous. Recopier et compléter les lignes L6, L7 et L9 de cet algorithme pour qu'il donne le résultat attendu.

L1	**Variables :**	T est un nombre
L2		N est un nombre entier
L3	**Traitement :**	Affecter à T la valeur 0,65
L4		Affecter à N la valeur 0
L5		Tant que $T < 0,80$
L6		Affecter à T la valeur ...
L7		Affecter à N la valeur ...
L8		Fin Tant que
L9	**Sortie :**	Afficher ...

4) On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = t_n - 0,82$.

a) Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $0,5$. Préciser son premier terme.

b) En déduire que : $t_n = -0,17 \times 0,5^n + 0,82$.

c) Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation : $-0,17 \times 0,5^n + 0,82 \geqslant 0,80$.

d) Interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.

Exercice 32

Les parties A et B sont indépendantes

Un créateur d'entreprise a lancé un réseau d'agences de services à domicile. Depuis 2010, le nombre d'agences n'a fait qu'augmenter. Ainsi, l'entreprise qui comptait 200 agences au 1er janvier 2010 est passée à 300 agences au 1er janvier 2012 puis à 500 agences au 1er janvier 2014.
On admet que l'évolution du nombre d'agences peut être modélisée par une fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont trois nombres réels.
La variable x désigne le nombre d'années écoulées depuis 2010 et $f(x)$ exprime le nombre d'agences en centaines. la valeur 0 de x correspond donc à l'année 2010.
Sur le dessin ci-dessous, on a représenté graphiquement la fonction f.

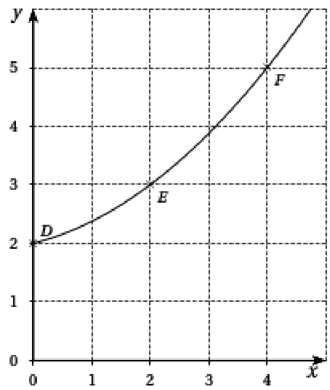
Partie A

On cherche à déterminer la valeur des cœfficients a, b et c.

1) a) À partir des données de l'énoncé, écrire un système d'équations traduisant cette situation.

b) En déduire que le système précédent est équivalent à : $MX = R$ avec

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$ et R une matrice colonne que l'on précisera.



2) On admet que $M^{-1} = \begin{pmatrix} 0,125 & -0,25 & 0,125 \\ -0,75 & 1 & -0,25 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

À l'aide de cette matrice, déterminer les valeurs des cœfficients a, b et c, en détaillant les calculs.

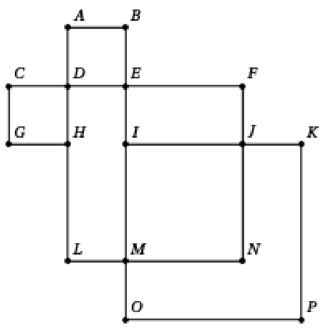
3) Suivant ce modèle, déterminer le nombre d'agences que l'entreprise possédera au 1er janvier 2016.

Partie B

Le responsable d'une agence de services à domicile implantée en ville a représenté par le graphe ci-dessous toutes les rues dans lesquelles se trouvent des clients qu'il doit visiter quotidiennement. Dans ce graphe, les arêtes sont les rues et les sommets sont les intersections des rues.

1) a) Déterminer si le graphe est connexe.

b) Déterminer si le graphe est complet.



Ce responsable voudrait effectuer un circuit qui passe une et une seule fois par chaque rue dans laquelle se trouvent des clients.

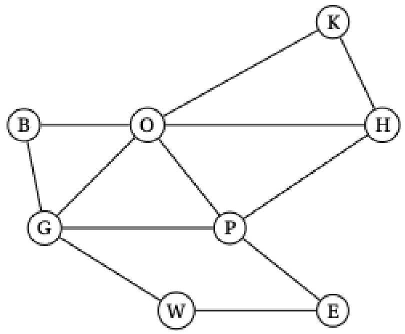
2) Déterminer si ce circuit existe dans les deux cas suivants :

a) Le point d'arrivée est le même que le point de départ.

b) Le point d'arrivée n'est pas le même que le point de départ.

Exercice 33

On a schématisé ci-dessous une partie du plan du métro londonien par un graphe Γ dont les sommets sont les stations et les arêtes sont les lignes desservant ces stations.
Chaque station de métro est désignée par son initiale comme indiqué dans la légende.



Légende :

B : Bond Street

E : Embankment

G : Green Park

H : Holborn

K : King's Cross St Pancras

O : Oxford Circus

P : Piccadilly Circus

W : Westminster

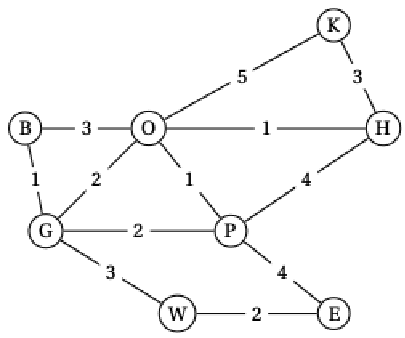
1) **a)** Déterminer en justifiant si le graphe Γ est connexe.
b) Déterminer en justifiant si le graphe Γ est complet.

2) Déterminer, en justifiant, si le graphe Γ admet une chaîne eulérienne. Si oui, donner une telle chaîne.

3) Donner la matrice d'adjacence M du graphe Γ (les sommets seront rangés dans l'ordre alphabétique).

Pour la suite de l'exercice, on donne la matrice $M^3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 & 4 & 2 & 7 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 6 & 4 \\ 6 & 1 & 4 & 4 & 4 & 9 & 10 & 6 \\ 4 & 1 & 4 & 4 & 5 & 8 & 8 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 5 & 2 & 7 & 3 & 1 \\ 7 & 3 & 9 & 8 & 7 & 8 & 10 & 3 \\ 3 & 6 & 10 & 8 & 3 & 10 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 3 & 1 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

4) Un touriste se trouve à la station Holborn. Il prévoit de se rendre à la station Green Park en utilisant exactement trois lignes de métro sur son trajet.
a) Sans utiliser le graphe, donner le nombre de trajets possibles et justifier la réponse.
b) Donner les trajets possibles .



Légende :

B : Bond Street

E : Embankment

G : Green Park

H : Holborn

K : King's Cross St Pancras

O : Oxford Circus

P : Piccadilly Circus

W : Westminster

Sur le graphe pondéré ci-dessus, on a indiqué la durée, exprimée en minutes, des trajets entre chaque station (la durée est indiquée sur chaque arête du graphe Γ).

5) À partir de la station Westminster, ce touriste doit rejoindre la station King's Cross St Pancras le plus rapidement possible pour prendre un train.
En utilisant l'algorithme de Dijkstra, déterminer le trajet permettant de relier la station Westminster à la station King's Cross St Pancras en une durée minimale. On précisera cette durée.

Exercice 34

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

Un constructeur de planches de surf fabrique 3 modèles. La conception de chaque modèle nécessite le passage par 3 postes de travail. Le **tableau 1** indique le nombre d'heures nécessaires par modèle et par poste pour réaliser les planches et le **tableau 2** indique le coût horaire par poste de travail.

Tableau 1	Poste 1	Poste 2	Poste 3		Tableau 2	
Modèle 1	8 h	10 h	14 h		Poste 1	25 €/h
Modèle 2	6 h	6 h	10 h		Poste 2	20 €/h
Modèle 3	12 h	10 h	18 h		Poste 3	15 €/h

1) Soit H et C les deux : matrices suivantes : $H = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 14 \\ 6 & 6 & 10 \\ 12 & 10 & 18 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 25 \\ 20 \\ 15 \end{pmatrix}$.

a) Donner la matrice produit $P = H \times C$.

b) Que représentent les coefficients de la matrice $P = H \times C$?

2) Après une étude de marché, le fabricant souhaite que les prix de revient par modèle soient les suivants :

Modèle 1 : 500 € ; Modèle 2 : 350 € ; Modèle 3 : 650 €

Il cherche à déterminer les nouveaux coûts horaires par poste, notés $a,\ b$ et c, permettant d'obtenir ces prix de revient.

a) Montrer que les réels a, b et c doivent être solutions du système

$$H \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 500 \\ 350 \\ 650 \end{pmatrix}.$$

b) Déterminer les réels $a,\ b$ et c.

Partie B

La façade du magasin dans lequel sont commercialisées les planches est illuminée par un très grand nombre de spots qui sont programmés de la manière suivante :

- les spots s'allument tous à 22 heures ;
- toutes les 10 secondes à partir de 22 heures, et ce de manière aléatoire, 30 % des spots allumés s'éteignent et 50 % de ceux qui sont éteints se rallument.

On note : A l'état : « le spot est allumé » et E l'état : « le spot est éteint ».

1) **a)** Dessiner un graphe probabiliste traduisant la situation.

b) Recopier et compléter la matrice de transition (dans l'ordre $A,\ E$) associée au graphe, $M = \begin{pmatrix} \cdots & 0,3 \\ 0,5 & \cdots \end{pmatrix}$.

2) On note n le nombre d'étapes (c'est à dire d'intervalles de temps de 10 secondes) qui s'écoulent à partir de 22 heures et $P_n = (a_n \quad b_n)$ l'état d'un spot à l'étape n, où a_n est la probabilité qu'il soit allumé et b_n la probabilité qu'il soit éteint.

On a alors, pour tout entier naturel n : $P_{n+1} = P_n \times M$.

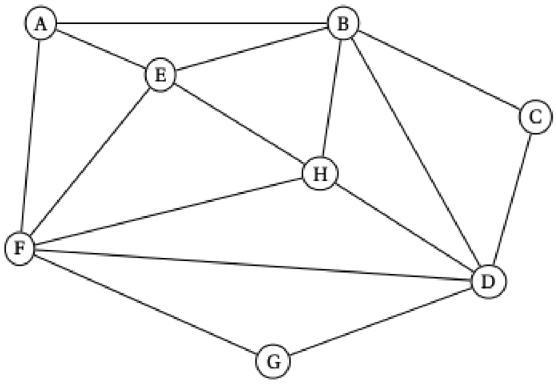
a) Justifier que $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$. Écrire une relation entre P_0 et P_n.

b) Déterminer les coefficients de la matrice P_3. Quelle est la probabilité que le spot considéré soit éteint à 22 heures et 30 secondes ?

3) Déterminer l'état stable $(a \quad b)$ du graphe probabiliste.

Exercice 35

La coopérative LAFRUITIERE collecte le lait de 7 exploitations de montagne. La situation géographique est représentée par le graphe ci-dessous, noté G_L. La coopérative est située au sommet A, les autres sommets B, C, D, E, F, G et H représentent les différentes exploitations ; les arêtes représentent le réseau routier reliant ces exploitations.



Partie A

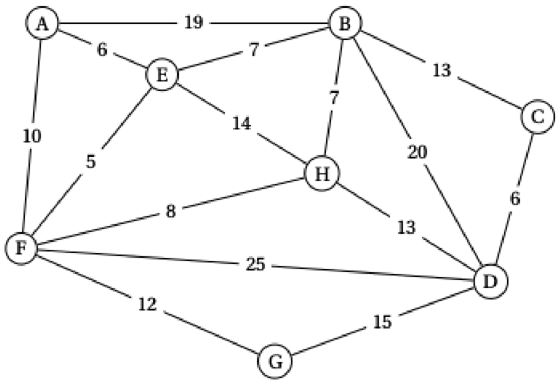
1) a) Le graphe G_L est-il complet ? Justifier.
   b) Le graphe G_L est-il connexe ? Justifier.
2) Est-il possible d'organiser une tournée de toutes les exploitations en partant de A et en terminant en A et en passant au moins une fois par chaque client, tout en empruntant une fois et une seule chaque route ? Justifier la réponse.
3) On appelle M la matrice d'adjacence associée au graphe G_L (les sommets étant pris dans l'ordre alphabétique).

On donne la matrice $M^3 = \begin{pmatrix} 4 & 11 & 3 & 7 & 8 & 11 & 3 & 6 \\ 11 & 8 & 7 & 13 & 12 & 8 & 6 & 13 \\ 3 & 7 & 2 & 7 & 5 & 6 & 2 & 4 \\ 7 & 13 & 7 & 8 & 8 & 13 & 7 & 12 \\ 8 & 12 & 5 & 8 & 8 & 12 & 5 & 11 \\ 11 & 8 & 6 & 13 & 12 & 8 & 7 & 13 \\ 3 & 6 & 2 & 7 & 5 & 7 & 2 & 4 \\ 6 & 13 & 4 & 12 & 11 & 13 & 4 & 8 \end{pmatrix}$

Déterminer, en justifiant, le nombre de chemins de longueur 3 reliant A à H.
Indiquer ces chemins.

Partie B

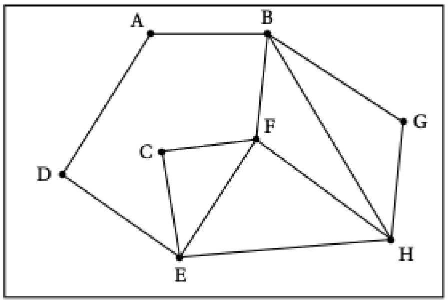
Les arêtes sont pondérées par les distances entre les exploitations, exprimées en kilomètres. La coopérative doit collecter du lait provenant de l'exploitation D ; quel est le plus court parcours pour se rendre de A à D ? Justifier.



Exercice 36

PARTIE A

On considère le graphe $\mathcal{G}$ ci-dessous :



1) Déterminer en justifiant si ce graphe :
   a) est connexe ;
   b) admet une chaîne eulérienne.
2) On note M la matrice d'adjacence associée à ce graphe en prenant les sommets dans l'ordre alphabétique. On donne :

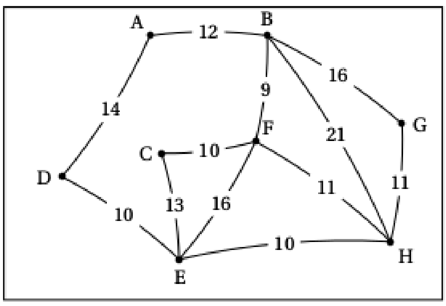
$$M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 & 3 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 5 & 9 & 6 & 8 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 6 & 6 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 5 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 6 & 5 & 4 & 8 & 3 & 9 \\ 2 & 9 & 6 & 3 & 8 & 6 & 3 & 9 \\ 1 & 6 & 3 & 2 & 3 & 3 & 2 & 6 \\ 3 & 8 & 3 & 2 & 9 & 9 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

   Donner, en justifiant, le nombre de chemins de longueur 3 reliant E à B.

PARTIE B

Un club alpin souhaite proposer à ses membres des randonnées de plusieurs jours dans les Alpes. À cet effet, huit refuges notés A, B, C, D, E, F, G et H ont été sélectionnés.
Le graphe $\mathcal{G}$ de la partie A permet de visualiser les différents itinéraires possibles, les sommets représentant les refuges et les arêtes schématisant tous les sentiers de randonnée balisés les reliant.

1) D'après l'étude effectuée dans la partie A, le club alpin est-il en mesure de proposer :
   a) un itinéraire au départ du refuge A qui passerait par tous les refuges en empruntant une fois et une seule fois chacun des sentiers ? Si oui, proposer un tel itinéraire ;
   b) des itinéraires de trois jours (un jour correspondant à une liaison entre deux refuges) reliant le refuge E au refuge B ? Si oui, combien peut-il en proposer ?
2) Le graphe $\mathcal{G}$ est complété ci-dessous par la longueur en kilomètres de chacun des sentiers.



   Le club alpin désire aussi proposer à ses membres l'itinéraire le plus court reliant A à H.
   Déterminer cet itinéraire et en préciser la longueur en kilomètres.

Exercice 37

Une municipalité vient de mettre en place le service « vélo en liberté ». Il s'agit d'un service de location de vélos à la journée. Les vélos sont disponibles sur deux sites A et B et doivent être ramenés en fin de journée indifféremment dans l'un des deux sites.
Après une étude statistique, on considère que :

— si un vélo est loué sur le site A, la probabilité d'être ramené en A est $0,6$;
— si un vélo est loué sur le site B, la probabilité d'être ramené en B est $0,7$.

Les résultats numériques seront arrondis à 10^{-2} près.

1) En notant respectivement A et B les états « le vélo est en A » et « le vélo est en B », traduire les données de l'énoncé par un graphe probabiliste de sommets A et B.

2) Donner M la matrice de transition de ce graphe en considérant les sommets dans l'ordre $A,\ B$.

3) Pour tout entier naturel n, on note a_n (respectivement b_n) la probabilité qu'un vélo quelconque soit, après n jours, sur le site A (respectivement sur le site B).
On note P_n la matrice $\begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ correspondant à l'état probabiliste après n jours.
Le premier jour, tous les vélos sont distribués également sur les deux sites. On a donc $P_0 = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$.

a) On donne :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0,48 & 0,52 \\ 0,39 & 0,61 \end{pmatrix}.$$

Calculer P_2 en donnant le détail des calculs matriciels.

b) Calculer P_4 et interpréter le résultat dans le contexte du problème.

c) Déterminer l'état stable du graphe, noté $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$.

d) Tous les mois, un véhicule est affecté à la redistribution des vélos afin de rétablir au mieux la répartition initiale qui était de 70 vélos sur chaque site.
La municipalité envisage d'affecter un véhicule pouvant contenir 12 vélos.
Ce choix parait-il adapté à la situation ?

Exercice 38

Dans un plan de lutte contre la pollution urbaine, une municipalité a décidé de réduire l'utilisation des automobiles en ville en instaurant une taxe pour les automobiles circulant dans une zone du centre ville appelée ZTL (Zone à Trafic Limité) et de développer un réseau de navettes.

Partie A

L'objectif affiché par la municipalité est de réduire de moitié la présence des automobiles dans la zone ZTL, dans les deux ans à venir.
Initialement, 40 % des automobiles circulant dans la ville, circulaient dans cette zone ZTL. Suite à l'instauration de la taxe, l'évolution du trafic dans la ville a été suivie mois après mois.
L'étude a révélé que, parmi les automobiles circulant dans la ville :

* 3 % des automobiles circulant dans la zone ZTL n'y circulaient plus le mois suivant.
* 0,2 % des automobiles qui ne circulaient pas dans la zone ZTL ont été amenés à y circuler le mois suivant.

On note Z l'état : « l'automobile a circulé dans la zone ZTL au cours du mois » et $\overline{Z}$ l'état : « l'automobile n'a pas circulé dans la zone ZTL au cours du mois ».
Pour tout entier naturel n, on note :

* a_n la proportion d'automobiles circulant dans la zone ZTL au cours du n-ième mois ;
* b_n la proportion d'automobiles ne circulant pas dans la zone ZTL au cours du n-ième mois ;
* $P_n = (a_n\ b_n)$ la matrice ligne donnant l'état probabiliste après n mois.

On a : $a_n + b_n; = 1$ et $P_0 = \begin{pmatrix}0,4 & 0,6\end{pmatrix}$.

1) Représenter la situation à l'aide d'un graphe probabiliste de sommets Z et $\overline{Z}$.

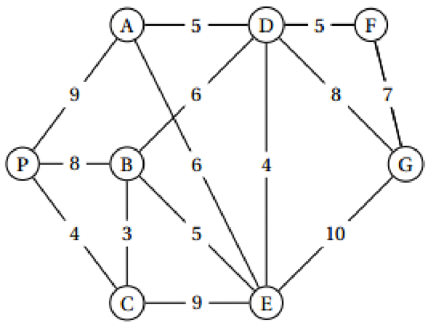
2) **a)** Donner la matrice de transition M associée à ce graphe (la première colonne concerne Z et la deuxième concerne $\overline{Z}$).

b) Vérifier que $P_1 = \begin{pmatrix}0{,}389\,2 & 0{,}610\,8\end{pmatrix}$.

3) L'objectif affiché par la municipalité sera-t-il atteint ?

Partie B

Un réseau de navettes gratuites est mis en place entre des parkings situés aux abords de la ville et les principaux sites de la ville.
Le graphe ci-contre indique les voies et les temps des liaisons, en minutes, entre ces différents sites.



1) Peut-on envisager un itinéraire qui relierait le parking P à la gare G en desservant une et une seule fois tous les sites ?

2) Peut-on envisager un itinéraire qui emprunterait une et une seule fois toutes les voies ?

3) Déterminer un trajet de durée minimale pour se rendre du parking P à la gare G.

Exercice 39

Dans une société d'assurance, les clients peuvent choisir de payer leur cotisation chaque mois (paiement mensuel) ou en une fois (paiement annuel).
On constate que 30 % de ceux qui paient en une fois choisissent le paiement mensuel l'année suivante, alors que 85 % de ceux qui paient chaque mois conservent ce mode de paiement l'année suivante.
En 2014, 60 % des clients paient en une fois et 40 % paient mensuellement.

Dans toute la suite de l'exercice, n désigne un nombre entier naturel.
On note :

- a_n la probabilité qu'un client choisi au hasard paie en une fois pour l'année $2014 + n$;
- b_n la probabilité qu'un client choisi au hasard paie mensuellement pour l'année $2014 + n$.

On a $a_0 = 0,6$ et $b_0 = 0,4$ et on note P_n l'état probabiliste pour l'année $2014 + n$. Ainsi $P_0 = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}$.
On note :

- A l'état « le client paie en une fois » ;
- B l'état « le client paie mensuellement ».

1) Représenter un graphe probabiliste de sommets A et B.

2) Écrire la matrice de transition M associée à ce graphe en prenant les sommets dans l'ordre alphabétique.

3) Déterminer la probabilité qu'un client paie en une fois durant l'année 2018 (arrondir les résultats au millième).

4) Déterminer l'état stable et en donner une interprétation.

5) Pour tout entier naturel n, justifier que $a_{n+1} = 0,55a_n + O,15$.

6) On cherche à déterminer le plus petit entier n tel que $a_n < 0{,}333\,4$.

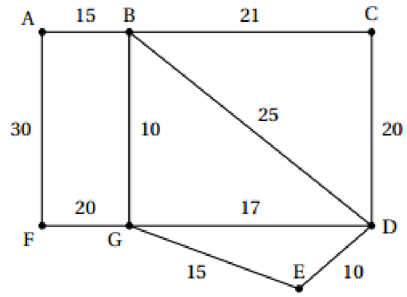
a) Écrire un algorithme permettant de déterminer cet entier n.

b) On admet que pour tout entier naturel n,

$$a_n = \frac{4}{15} \times 0,55^n + \frac{1}{3}.$$

Déterminer par le calcul le plus petit entier n tel que $a_n < 0{,}333\,4$.

Exercice 40



Un cycliste désire visiter plusieurs villages notés A, B, C, D, E, F et G reliés entre eux par un réseau de pistes cyclables.
Le graphe ci-contre schématise son plan ; les arêtes représentent les pistes cyclables et les distances sont en kilomètre.

Partie A
Pour faire son parcours, le cycliste décide qu'il procédera selon l'algorithme ci-dessous :

ligne 1	Marquer sur le plan tous les villages comme non « visités »
ligne 2	Choisir un village de départ
ligne 3	Visiter le village et le marquer « visité »
ligne 4	Rouler vers le village le plus proche
ligne 5	Tant que le village où il arrive n'est pas un village déjà visité
ligne 6	—visiter le village et le marquer « visité »
ligne 7	—rouler vers le village le plus proche sans revenir en arrière
ligne 8	Fin Tant que
ligne 9	afficher la liste des villages visités

1) Quelle propriété du graphe permet à la ligne 4 d'être toujours exécutable ?

2) En partant du village noté G, quelle sera la liste des villages visités ?

3) Existe-t-il un village de départ qui permette, en suivant cet algorithme, de visiter tous les villages ?

4) Le cycliste abandonne l'idée de suivre l'algorithme. Il souhaite maintenant, partant d'un village, y revenir après avoir emprunté toutes les pistes cyclables une et une seule fois. Cela sera-t-il possible ?

Partie B

1) Écrire la matrice M de transition de ce graphe (dans l'ordre $A, B, C, \dots, G$).

2) On donne la matrice M^4 :

$$M^4 = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} A & B & C & D & E & F & G \end{array} \\ \begin{pmatrix} 10 & 5 & 9 & 11 & 4 & 1 & 16 \\ 5 & 30 & 12 & 23 & 18 & 16 & 16 \\ 9 & 12 & 12 & 14 & 9 & 4 & 18 \\ 11 & 23 & 14 & 28 & 14 & 11 & 23 \\ 4 & 18 & 9 & 14 & 12 & 9 & 12 \\ 1 & 16 & 4 & 11 & 9 & 10 & 5 \\ 16 & 16 & 18 & 23 & 12 & 5 & 30 \end{pmatrix} \end{array}$$

Interpréter le terme en gras, ligne A, colonne F (valant 1) dans le contexte de l'exercice.

Exercice 41

L'été un centre de loisirs propose aux adolescents la pratique du canoë-kayak ou de la planche à rame.
Tous les matins, chaque adolescent doit choisir un et un seul sport parmi les deux proposés.
On admet que :

- si un adolescent choisit le canoë-kayak un jour donné, alors la probabilité qu'il choisisse la planche à rame le jour suivant est égale à $0,4$;
- si un adolescent choisit la planche à rame un jour donné, alors la probabilité qu'il choisisse le canoë-kayak le jour suivant est égale à $0,2$;
- le premier jour, la proportion d'adolescents qui choisissent le canoë-kayak est égale à $0,85$.

On note :

- K l'état : « l'adolescent choisit le canoë-kayak » ;
- $\overline{K}$ l'état : « l'adolescent choisit la planche à rame ».

On note, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:

- p_n la probabilité qu'un adolescent pris au hasard choisisse le canoë-kayak lors du n-ième jour ;
- q_n la probabilité qu'un adolescent pris au hasard choisisse la planche à rame le n-ième jour ;
- $P_n = \begin{pmatrix} p_n & q_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne donnant l'état probabiliste lors du n-ième jour.

Les deux parties peuvent être traitées indépendamment.

Partie A

1) Représenter la situation à l'aide d'un graphe probabiliste de sommets K et $\overline{K}$.

2) Donner la matrice de transition M associée à ce graphe, les sommets K et $\overline{K}$ étant classés dans cet ordre.

3) Justifier que $P_1 = \begin{pmatrix} 0,85 & 0,15 \end{pmatrix}$.

4) Avec la calculatrice, déterminer l'état probabiliste lors du 3e jour.

5) Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, montrer que $p_{n+1} = 0,4p_n + 0,2$.

6) On considère l'algorithme suivant :

```
Initialisation
Choisir un nombre entier naturel N ⩾ 2
p prend la valeur 0,85

Traitement
Pour i allant de 2 à N
    p prend la valeur 0,4p + 0,2
Fin pour

Sortie
Afficher p
```

a) Pour la valeur $N = 5$ saisie, recopier et compléter le tableau suivant par autant de colonnes que nécessaire pour retranscrire l'exécution de l'algorithme. Arrondir les résultats au millième.

Valeur de i		2		
Valeur de p	0,85			

b) En déduire l'affichage obtenu quand la valeur de N saisie est 5.

c) Dans le contexte de cet exercice, expliquer comment interpréter le nombre obtenu en sortie de cet algorithme.

Partie B

D'après la partie A, on sait que $p_{n+1} = 0,4p_n + 0,2$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.
On admet que $p_n = \dfrac{31}{60} \times 0,4^{n-1} + \dfrac{1}{3}$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

1) Conjecturer la limite de la suite (p_n).

2) Interpréter le résultat.

Exercice 42

Claudine est une passionnée de lecture abonnée à l'hebdomadaire littéraire ≪ La Lecture ≫. Elle se rend une fois par semaine à la bibliothèque et demande ou non l'avis de la bibliothécaire sur le livre mis en valeur dans l'hebdomadaire ≪ La Lecture ≫.
Lorsque Claudine demande à la bibliothécaire son avis, la probabilité qu'elle le demande de nouveau la semaine suivante est $0,9$.
Lorsque Claudine ne demande pas à la bibliothécaire son avis, la probabilité qu'elle ne le demande pas non plus la semaine suivante est $0,6$.
La première semaine, on suppose que la probabilité que Claudine demande un avis vaut $0,1$.
Pour tout nombre entier naturel n strictement positif, on note :

- a_n la probabilité que Claudine demande un avis à la bibliothécaire la n-ième semaine ;
- b_n, la probabilité que Claudine ne demande pas d'avis à la bibliothécaire la n-ième semaine ;
- $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne traduisant l'état probabiliste la n-ième semaine.

On a ainsi $a_1 = 0,1$ et $b_1 = 0,9$.

1) **a)** Illustrer la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B : A représente l'état ≪ Claudine demande un avis à la bibliothécaire ≫ ; B représente l'état ≪ Claudine ne demande pas d'avis à la bibliothécaire ≫.

b) Indiquer la matrice de transition M associée à ce graphe. On prendra les sommets A et B dans l'ordre (A, B).

2) Montrer que l'on a $P_2 = \begin{pmatrix} 0,45 & 0,55 \end{pmatrix}$.

3) **a)** Montrer que l'état stable de la répartition du choix de la demande d'avis est $P = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \end{pmatrix}$.

b) Interpréter ce résultat.

4) On admet que, pour tout nombre entier naturel n strictement positif, on a :

$$a_{n+1} = 0,5a_n + 0,4.$$

On considère l'algorithme suivant :

VARIABLES :	A est un réel et N est un entier naturel
INITIALISATION :	A prend la valeur $0,1$ N prend la valeur 1

TRAITEMENT :	Tant que $A \leqslant 0,79$
	    N prend la valeur $N+1$
	    A prend la valeur $0,5 \times A + 0,4$
	Fin du Tant que

SORTIE :	Afficher N

Préciser ce que cet algorithme permet d'obtenir. (On ne demande pas de donner la valeur de N affichée en sortie d'algorithme.)

5) Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.
On admet que, pour tout nombre entier naturel n strictement positif, on a :

$$a_n = 0,8 - 0,7 \times 0,5^{n-1}.$$

Déterminer le nombre de semaines à partir duquel la probabilité que Claudine demande un avis soit supérieure à $0,799$.

Exercice 43

Exercice 44

Exercice 45

Exercice 46

Exercice 47

Exercice 48

Exercice 49

Exercice 50